58.551

Biblioteca Universității Iași
III - 58.551
BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

vol. 2

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

58.551

EDITURA CASEI ŞCOALELOR ŞI CULTURII POPORULUI

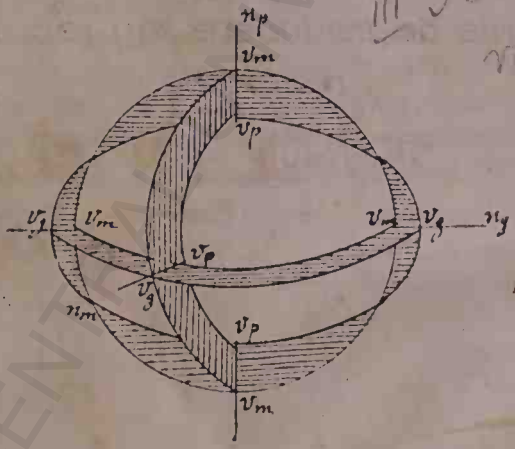
CURS
DE
MINERALOGIE
PROFESAT LA UNIVERSITATEA DIN IAŞI

DE

V. C. BUŢUREANU

PROFESOR DE MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE
LA FACULTATEA DE ŞTIINŢI

III 58.551
vol 2



PARTEA II-a
CRISTALOGRAFIE FIZICĂ

IAŞI – VIAŢA ROMÎNEASCĂ – 1927

BCU IAŞI/CENTRUL VECHI/LIBRARY

III -58.551

Drepturile de traducere sau reproducere rezervate.

7 IUN 1965
IAȘI
acc 225.145

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. V.

Forme compuse

Am studiat până acum formele simple pe care le prezintă cristalii, insistând asupra modului lor de obținere, de notare și reprezentare. Dar în natură, aceste forme simple se prezintă foarte rar separate unele de altele: cele mai de multe ori ele se asociază între ele, două sau mai multe, așa că găsim cristali cari prezintă un număr foarte mare de fețe, aparținând la diverse forme simple. Acestor forme li se dă numele de: *Forme compuse* sau *Combinațiuni cristaline.* Cu toate că vom avea ocaziunea de a studia aceste forme compuse în descrierea specielor minerale, totuși e bine a lua exemple în diversele sisteme cristaline și a arata, cum putem trece succesiv de la o formă simplă la una compusă și cum poate varia aspectul acestor forme compuse, după desvoltarea mai mare sau mai mică a fețelor uneia sau alteia din formele simple ce intră în forma compusă.

Pentru a prezenta această chestiune cât mai simplu și mai clar, vom studia formele compuse la diversele sisteme cristaline.

1. *Formele compuse ale sistemului cubic.* — Am văzut că, pentru a arăta deducerea formelor derivate din formele primitive, după metoda truncheturelor, se înlocuesc unghiurile sau muchile formei primitive prin fețe dispuse în mod diferit. Aceste fețe pot fi mai puțin sau mai mult desvoltate, dând formei compuse care rezultă, aspecte deosebite, după cum predomină forma primitivă sau forma derivată.

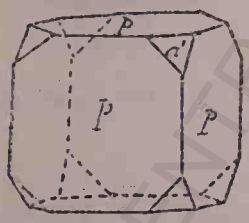


Fig. 354

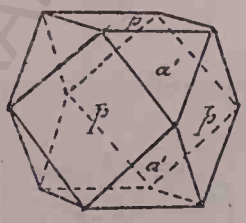


Fig. 355

Așa: dacă considerăm deducerea Octaedrului din Cub, vedem că, forma întâia de trecere (Fig. 354) e reprezentată prin un cub, a cărui unghiuri sunt înlocuite prin câte o fațetă triunghiulară, forma generală a cristalului rămânând tot cubică. Dacă fețele modificătoare se desvoltă, ajunge un moment în care fețele modificătoare sunt tot atât de desvoltate, ca acele a formei primitive (Fig. 355), așa că, putem zice că avem în realitate o combinație a fețelor cubului cu fețele octaedrului.

Dacă însă feţele modificătoare iau o desvoltare mai mare, atunci forma generală nu mai are aspect cubic, dar octaedric, aşa în cât o putem considera ca fiind un Octaedru a cărui unghiuri sunt înlocuite prin feţele cubului (Fig 356). Prin urmare putem lua ca exemple de forme compuse din câte două feluri de feţe, toate trecerele de la cub la formele derivate.—Aşa avem: cubul combinat cu trioctaedrul $a\ \frac{1}{2}$ (Fig. 357) cubul cu trapezoedrul a^2 (Fig. 358, 359) apoi: cubul cu dodecaedrul romboidal (Fig. 360, 361), sau cubul cu tetrahexaedrul b^3 (Fig. 362). Pot de asemenea interveni combina-

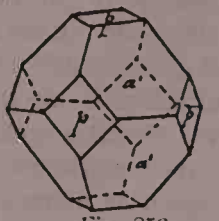


Fig. 356

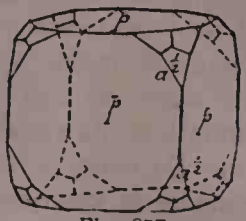


Fig. 357

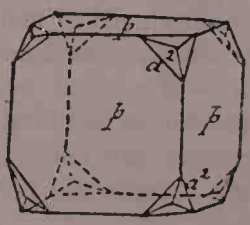


Fig. 358

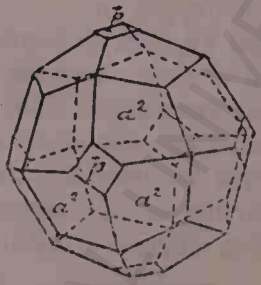


Fig. 359

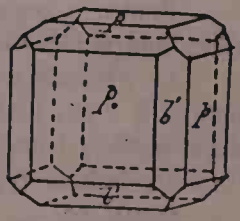


Fig. 360

ţiele cubului cu forme hemiedrice, din care vom cita: cubul cu

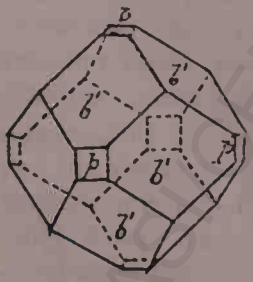


Fig. 361

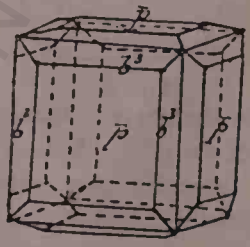


Fig. 362

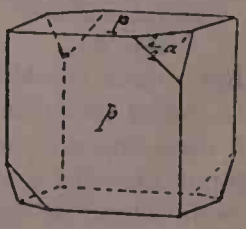


Fig. 363

tetraedrul (Fig.363, 364), cubul cu dodecaedrul pentagonal $\frac{1}{2}b^2$ (Fig. 365) etc.

Dar putem întâlni şi combinaţiele formelor derivate între ele, care pot prezenta foarte multe variaţii. Vom cita ca mai frecvente: Octaedrul cu trapezoedrul a^3 (Fig. 366); dodecaedrul romboidal şi octaedrul (Fig. 367); dodecaedrul romboidal şi trapezoedrul a^3 (Fig. 368); dodecaedrul cu hexatetraedrul b^2 (Fig. 369). Apoi dodecaedrul pentagonal b^2 cu octaedrul (Fig. 370), formă căreia s'a dat numele de *Icosaedru.*

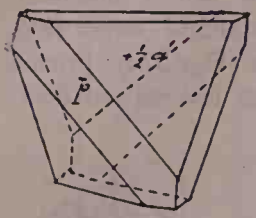


Fig. 364

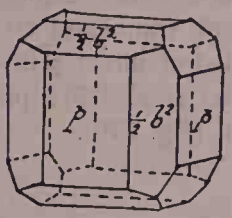


Fig. 365

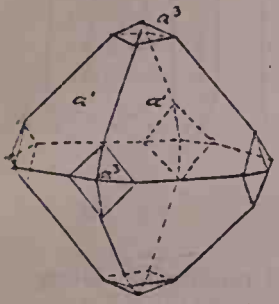


Fig. 366

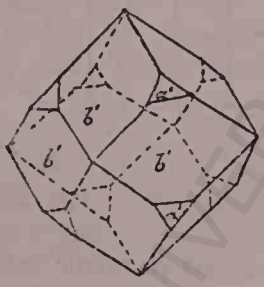


Fig. 367

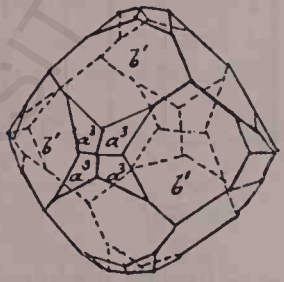


Fig. 368

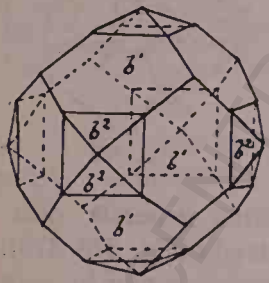


Fig. 369

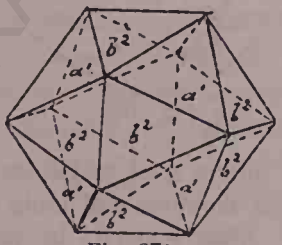


Fig. 370

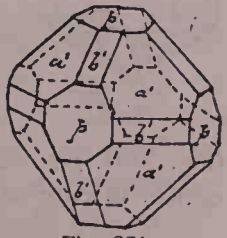


Fig. 371

Fig. 372

In fine găsim forme compuse din mai mult de două forme simple. Citătm: combinaţia octaedrului cu dodecaedrul romboidal şi cubul. (Fig. 371); dodecaedrul romboidal cu tetraedrul şi cubul (Fig. 372).

II. *Formele compuse ale sistemului patratic,* sunt mai puţin numeroase. Ca şi la sistemul cubic, putem considera ca forme

compuse, trecerile de la prizma patratică la diversele forme derivate ce rezultă prin modificarea unghiurilor sau a muchilor. Aşa avem: prizma directă combinată cu octaedrul direct (Fig. 373), sau prizma cu octaedrul direct şi invers (Fig. 374); prizma inversă cu octaedrul direct (Fig. 375); prizma inversă cu octaedrul direct şi dioctaedrul (Fig. 376).

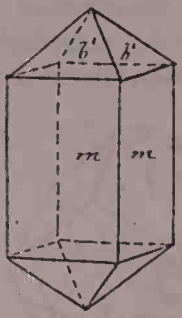


Fig. 373

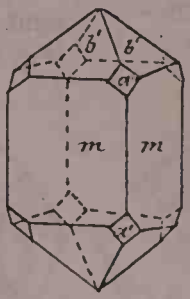


Fig. 374

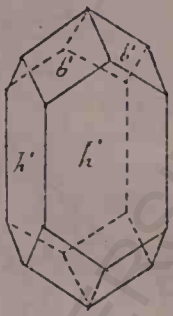


Fig. 375

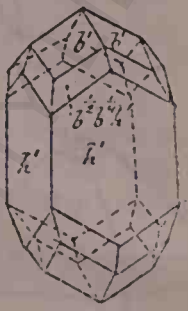


Fig 376

Cristalii pot avea aspect prizmatic când predomină feţele de prizmă dreaptă sau inversă, deşi prezintă şi feţe octaedrice

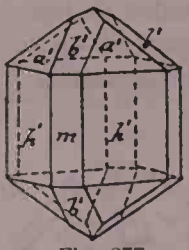


Fig. 377

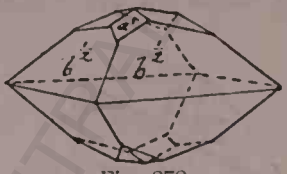


Fig. 378

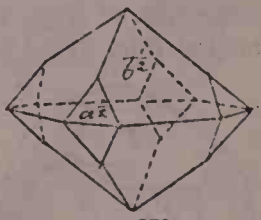


Fig. 379

(Fig. 377), pe când putem găsi crstali cu forma generală octaedrică, în care se pot combina mai mulţi octaedri (Fig. 378, 379).

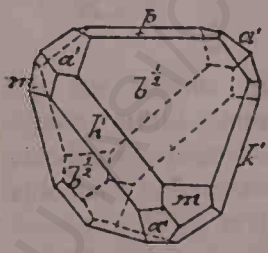


Fig. 380

Vom mai cita în particular forme în care predomină feţe hemiedrice $\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$ combinate cu feţe de octaedru a', cu feţe de prizmă dreaptă şi inversă m şi h' şi câte odată apărând şi feţele bazei p (Fig. 380).

III. *Formele compuse ale sistemului ortorombic.* La acest sistem găsim mai deseori forme mai complicate în afară de for-

mele de trecere. De multe ori cristalii sunt prizmatici vertical, dar se întâmplă să se lungească şi orizontal, fie după macro sau brahidiagonală. Vom cita următoarele combinaţiuni: Prizma combinată cu brahiprizma g^3 şi cu octaedrul $b^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 381); brahiprizma g^3 cu octaedrul $b^{\frac{1}{2}}$ şi macrodoma a' (Fig. 382); brahipinacoidul cu macropinacoidul

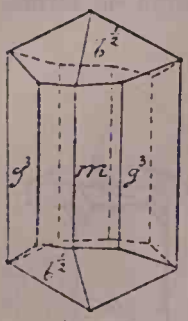


Fig. 381

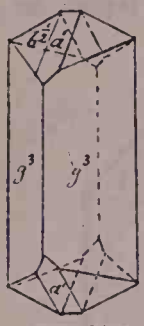


Fig. 382

Fig. 383

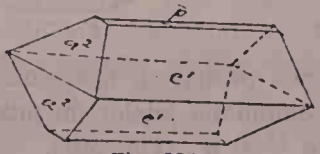


Fig. 384

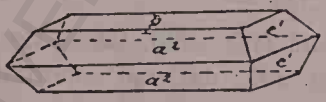


Fig. 385

şi octaedrul $b^{\frac{1}{2}}$. Ca forme lungite orizontal avem: baza cu macrodoma a^2 şi brahidoma e' lungită; (Fig. 384); baza cu macrodoma a^2 lungită şi brahidoma e' (Fig. 385) sau prizma combinată cu baza, şi macrodoma a^2 lungită (Fig. 386). Iar ca formă mai complicată citäm: combinaţia celor trei pinacoizi, cu prizma, octaedrul $b^{\frac{1}{2}}$ macrodoma a^2, brahidoma e' lungită împreună cu g', macroprizma h^3, precum şi o brahipiramidă ($b' b^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}}$) (Fig. 387).

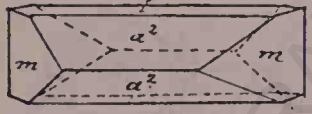


Fig. 386

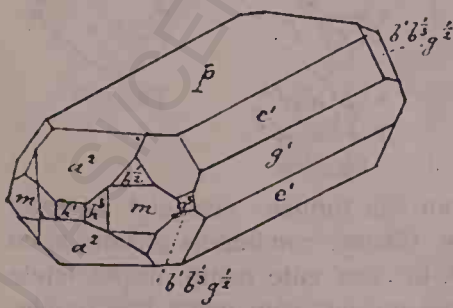


Fig. 387

IV. *Forme compuse ale sistemului hexagonal,* Formele compuse ale sistemului hexagonal sunt mult mai restrânse, de oare ce cea mai mare parte a formelor considerate ca hexagonale, aparţin sistemului romboedric. Aşa: găsim cristali prizmatici

compuşi din feţele de prizmă, cu isosceloedrul b' şi cu baza (Fig. 388); care se reduce prin dispariţia feţelor de prizmă la forma

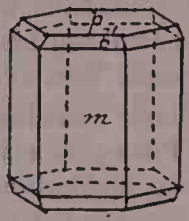


Fig 388

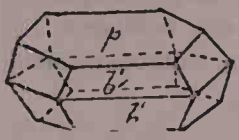


Fig. 389

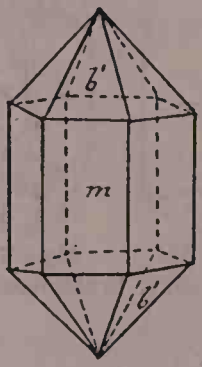


Fig. 390

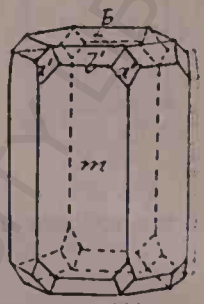


Fig. 391

tabulară (Fig. 389). Găsim de asemenea prizma cu isosceloedrul b' Fig. 390; dar mai importantă e combinaţia feţelor de prizmă cu baza şi cu cele două isosceloedre b' şi a', (Fig. 391).

V. *Forme compuse ale sistemului romboedric.* Aici vom găsi un mare număr de forme compuse, din care unele au aspect predominant prizmatic hexagonal, iar altele cu aspect curat

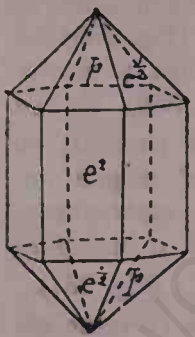


Fig. 392

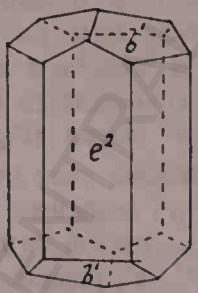
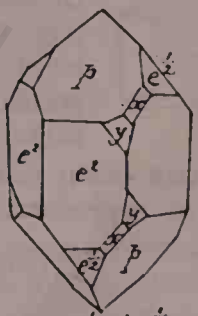


Fig. 393



$x = b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{2}}$
$y = b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{2}}$

Fig. 394

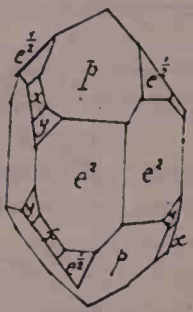


Fig. 395

romboedric. Între cele întâi vom cita formele cvarţului care au fost considerate ca hexagonale. Găsim: combinaţia prizmei e^2 cu romboedrele p şi $e^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 392), în care câte odată dispar feţele $e^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 393); Cristalii de cvarţ prezintă câte odată feţe hemiedrice, dând cristali dextrogiri sau levogiri (Fig. 394, 395). Găsim apoi prizma inversă d' combinată cu romboedrul p (Fig. 396),

precum şi prizma inversă combinată cu romboedrul p şi hemiscalenoedrul $\frac{1}{2}d^3$ (Fig. 397).

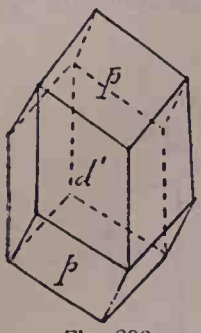


Fig. 396

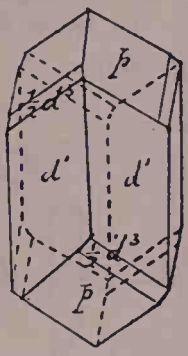


Fig. 397

Ca forme curat romboedrice găsim: romboedrul combinat cu baza sub formă de lamele hexagonale (Fig. 398); romboedru primitiv combinat cu romboedrul invers b' (Fig. 399); sau cu romboedrul $e^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 400); romboedrul primitiv combinat cu romboedrul invers e' (Fig. 401) sau romboedrul p combinat cu romboedrul a^2 şi isosceloedrul $e_{\frac{1}{2}}$ (Fig. 402). In fine citãm scalenoedrul d^2 combinat cu romboedrul primitiv p (Fig. 403).

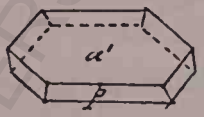


Fig. 398

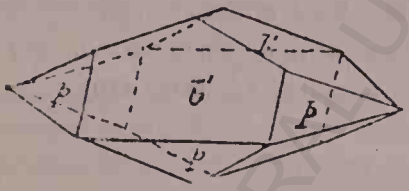


Fig. 399

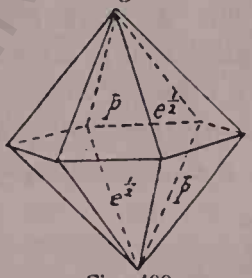


Fig. 400

VI. *Forme compuse la sistemul clinorombic.* La sistemul clinorombic vom cita următoarele forme compuse: feţele de

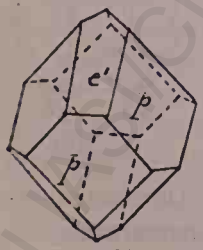


Fig. 401

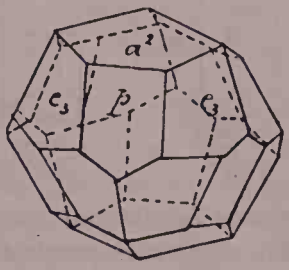


Fig. 402

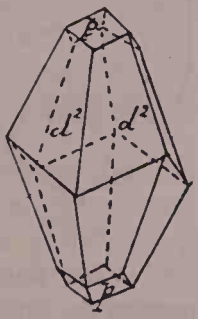


Fig. 403

prismă combinate cu clinopinacoidul şi cu feţele de octaedru $d^{\frac{1}{2}}$ şi $b^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 404) sau numai cu octaedrul negativ (Fig. 405); O formă mai complicată e compusă din feţele de prismă orto şi clinopinacoid şi octaedrul $d^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 406).

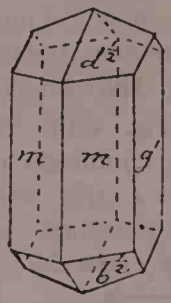


Fig. 404

Fig. 405

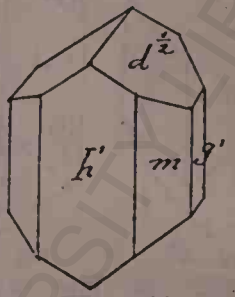


Fig. 406

La amfiboluri, piroxene, ortoz etc. găsim forme prezentând feţele de: prismă, orto şi clinopinacoid, octaedrele $b^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{4}}$ şi precum şi faţa de bază (Fig. 407); Apoi prizma combinată cu baza, ortopinacoidul şi octaedrul $b^{\frac{1}{2}}$ şi $d^{\frac{1}{2}}$. (Fig. 408) sau forma obicinuită a ortozului compusă din: baza, prizma, clinopinacoidul şi ortodoma $a^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 409) sau: baza, prizma, clinopinacoid, ortodomele a' şi $a^{\frac{1}{2}}$, clinodoma $e^{\frac{1}{2}}$ şi piramida $b^{\frac{1}{2}}$. (Fig. 410).

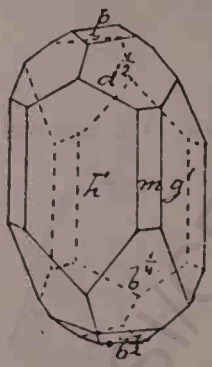


Fig. 407

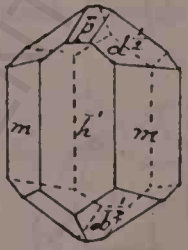


Fig. 408

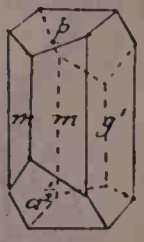


Fig. 409

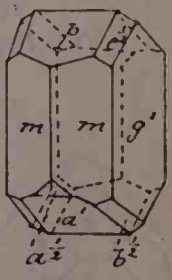


Fig. 410

VII. Forme compuse la sistemul asimetric. Din cauza minimului de simetrie găsim forme ce prezintă feţe numeroase.

Aşa: la plaghioclase găsim: feţele de prismă, baza, brahipinacoid, macrodoma a' piramida $b^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 411); sau forma lungită

după macrodiagonală (Fig. 412). La Axinit găsim: feţele de prismă,

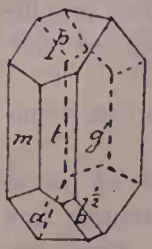


Fig. 411

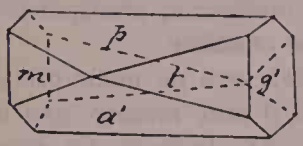


Fig. 412

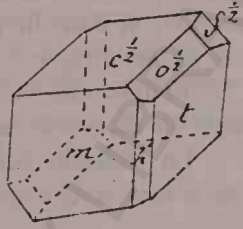


Fig. 413

macrodoma $o\frac{1}{2}$, piramidele $f\frac{1}{2}$ şi $c\frac{1}{2}$. (Fig. 413).

CAPITOL VI

Gruparea cristalelor

Când s'a dat definiţia cristalului, s'a spus că, el este un poliedru convex, prezentând în totdeauna feţe plane şi unghiuri care iesă în afară. Dar în natură găsim cristali amestecaţi câte odată în mod neregulat, aşa încât gruparea lor nu poate fi studiată. Alte ori însă gruparea lor se face după anumite legi şi în acest caz găsim, contrar celor anunţate în definiţia cristalului, că, un cristal ce pare a fi unic prezintă o formă concavă, adecă, are unghiuri care intră. In acest caz avem gruparea numită *Maclă*. Alteori cristalul prezintă un aspect unic, şi numai prin observarea exterioară nu ne putem da samă că, în realitate avem a face cu o grupare; va trebui să facem recurs la studiul proprietăţilor optice a acelui cristal pentru a ne da samă de existenţa maclei. Acestui gen de grupare s'a dat numele de *Mimezie* din cauză că, o grupare *imitează* o formă simplă.

Dacă se studiază maclele, se constată că, ele pot avea loc în două moduri: 1° *prin juxtapunere* sau prin *hemitropie* şi 2° prin *pătrundere*.

I. *Macle prin juxtapunere*. Acest gen de macle are loc: sau între doi cristali care se unesc prin o faţă comună, a cărui plan poartă numele de: *plan de maclă:* sau între două părţi a unui aceluiaş cristal, care a fost tăet prin un plan paralel cu una din feţele ce există, sau poate exista pe cristal.—Dacă examinăm poziţiunea celor doi cristali ce formează această maclă, constatăm că, întotdeauna unul din cristali a încercat mai întâi o rotaţiune de 180° în jurul unei axe, care poate fi paralelă sau per-

pendiculară faţă de planul de maclă; în acest caz această rotaţiune poartă numele de *hemitropie;* iar macla se zice: prin hemitropie, şi axa în jurul căreia a avut loc rotaţiunea se zice *axa de hemitropie.*

Vom studia în cele următoare, principalele cazuri de hemitropie la diversele sisteme cristaline.

La *sistemul cubic,* cele mai de multe ori planul de maclă este o faţă a Octaedrului şi prin urmare axa de rotaţiune este axa ternară. Ca exemplu avem aşa numita: *macla Spinelului,* în care două jumătăţi a Octaedrului se reunesc după un plan paralel cu o faţă a Octaedrului.

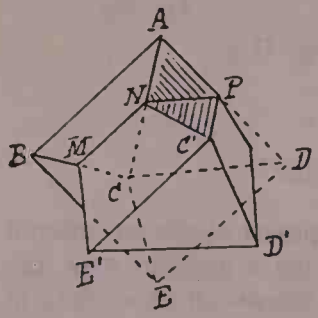


Fig. 414

In adevăr: să considerăm octaedrul A B C D E (Fig. 414), pe care-l tăem prin planul M N P paralel cu faţa C D E, şi dacă învârtim o jumătate de cristal în jurul axei normale la planul M N P, care e de simetrie ternară, e uşor de văzut că, pentru o rotaţiune de 60° vom obţine o maclă, punctele C, D şi E venind în C', D' şi E'. In acest caz feţele A N P şi N P C' formează un unghiu care intră, ceia ce arată existenţa maclei.

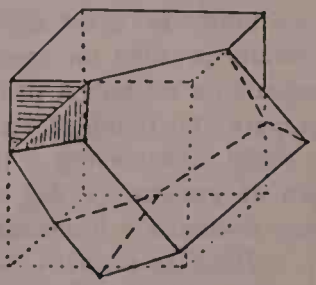


Fig. 415

Găsim de asemenea la aur, cristali cubici care prezintă o maclă după o faţă de Octaedru (Fig. 415) având de asemenea, unghiuri care intră.

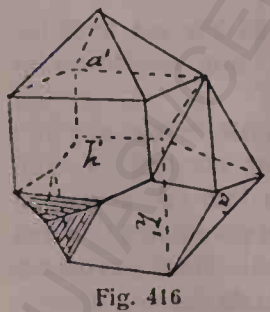


Fig. 416

La *sistemul patratic* găsim că, tipurile principale de maclă au planul de maclă paralel cu o faţă de piramidă. Aşa: la Casiterită (Fig. 416), găsim doi cristali prezentând feţele h' şi a' reuniţi în maclă după o faţă paralelă cu b'; aici feţele a' a celor doi cristali formează un unghiu care intră.—La Rutil găsim de asemenea macle analoage cu acele ale Casiteritei, prezentând însă forma particulară numită *Geniculată*

(Fig. 417). Această maclă se poate repeta între 3, 4 sau mai mulţi cristali.

La *sistemul romboedric,* găsim macle prin hemitropie având ca axă de hemitropie axa ternară normală pe planul de maclă, aşa că, după o rotaţiune de 60°, macla apare. Aşa găsim doi cristali romboedrici de Calcită reuniţi în maclă după o faţă paralelă cu *b'*. (Fig. 418); sau doi scalenoedri reuniţi prin un plan normal axei ternare, ceia ce face să apară trei unghiuri care intră (Fig. 419).

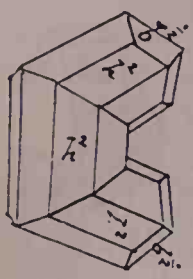


Fig. 417

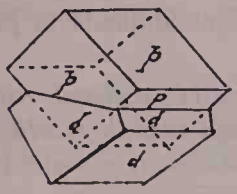


Fig. 418

La *sistemul Ortorombic* găsim o maclă tip a Aragonitei, în care cristali prizmatici se reunesc după o faţă de prizmă. Dacă considerăm o secţiune normală la axă, compusă din feţele *m* şi *g'* şi tăem cristalul prin planul P P' paralel cu faţa *m*, după învârtirea unei părţi de cristal, se vede formându-se în *P* un unghiu care intră (Fig. 420, 421). Dacă această maclă se repetă de mai multe ori într'un senz sau altul, dar în aceiaşi direcţiune, cristalul ia aparenţă scalariformă.

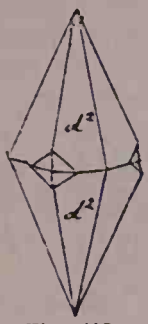


Fig. 419

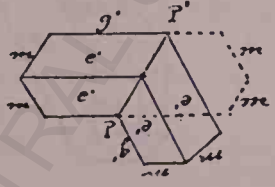


Fig. 420

Fig. 421

Sistemul monoclinic ne dă mai multe genuri de maclă importante. Cazul tipic este dat de Gips. Un cristal turtit după *g'* (Fig. 422) este tăet prin un plan paralel cu *h'* şi apoi o jumătate învârtită de 180° în jurul normalei la *h'*

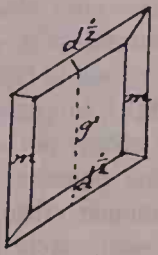


Fig. 422

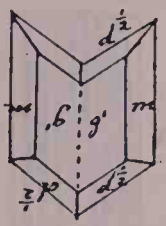


Fig. 423

(Fig. 423). Se obţine macla numită *în fer de lance*. Mai importante sunt maclele ce le găsim la Ortoz. In aşa numita *macla de Manebach*, planul de maclă e paralel cu *p*, feţele *m* formând un unghiu care intră, iar feţele *g'* fiind pe acelaş plan (Fig. 424).

La *macla de Carlsbad*, găsim un gen nou în care, doi cristali se reunesc după o faţă paralelă cu *g*, însă axa de maclă nu e normală la *g*, dar e paralelă cu muchea *mm*, deci e conţinută în planul de maclă (Fig. 425).

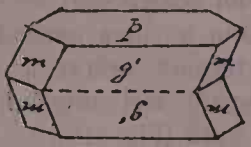


Fig. 424

Fig. 425

In fine la *sistemul triclinic* găsim aşa numita *maclă polisintetică* a plaghioclaselor. Dacă considerăm o secţiune normală la *g* (Fig. 426) într'un cristal redus la feţele *p* şi *g'*, tăind în două această secţiune prin un plan paralel cu *g'* şi apoi întoarcem o jumătate de 180° în jurul normalei la *g'*, atunci feţele

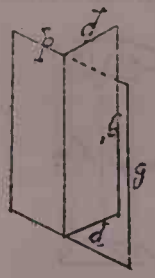


Fig. 426

Fig. 427

Fig. 428

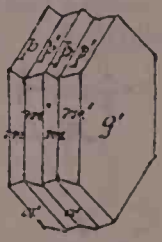


Fig. 429

p a acestor două jumătăţi formează între ele un unghiu care intră, şi având forma unui uluc s'a numit: *ulucul* sau *gutiera albitului*. (Fig. 427, 428). Adesea ori această maclă se repetă la feldspatele triclinice între cristali foarte subţiri, iar urma ulucului se manifestă sub formă de striuri pe faţa *p*, şi numai examinând în lumina polarizată o secţiune paralelă cu *h* în asemenea cristal, ne putem da samă de existenţa acestei macle polisintetice (Fig. 429, 430).

Fig. 430

II. *Macle prin pătrundere*, La maclele prin pătrundere găsim doi sau mai mulţi cristali, din care unia, după ce

au suferit o învârtitură de un unghiu oare care în jurul unei axe, se străbat cu acei ce nu s'au învârtit; — fără însă ca, planurile după care se face unirea să fie întotdeauna paralele cu una din feţele cristalilor; în genere aceste suprafeţe de unire nu sunt plane. — Axa în jurul căreia s'a făcut rotaţiunea se numeşte *axa grupării*, care câte odată este una din axele de simetrie a sistemului cristalin corespondent.

Găsim la diversele sisteme cristaline exemple caracteristice de acest gen de macle.

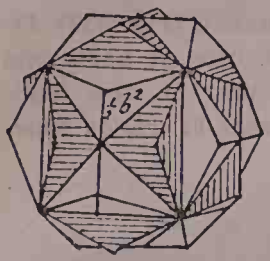


Fig. 431

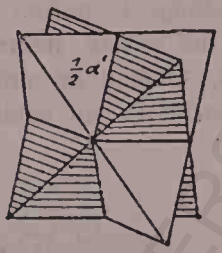


Fig 432

La *sistemul cubic*, găsim macla prin pătrundere a doi cristali dodecaedri pentagonali, în care se vede că, unul din cristali a suferit o rotaţiune de 90° în jurul unei axe cvaternare a cubului şi apoi a pătruns pe cel-alt (Fig. 431). Acest gen de maclă numită *Crucea de Fer* se găseşte la Pirită. — De asemenea găsim la Diamant macla a doi tetraedri, din care unul a suferit o rotaţiune de 90° în jurul axei cvaternare a cubului (Fig. 432). La Fluorină găsim macla a doi cristali cubici, în care un cristal s'a învârtit de 60° în jurul axei ternare a cubului, cu toate că această axă ar cere o rotaţiune de 120° (Fig. 433).

La *sistemul Ortorombic*, găsim cel mai frumos exemplu de maclă prin pătrundere la Staurotidă, în care doi cristali prizmatici

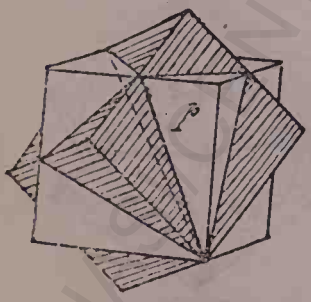


Fig. 433

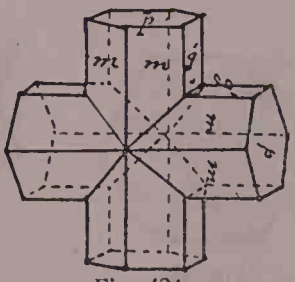


Fig. 434

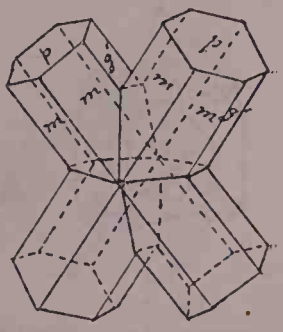


Fig. 435

cu aspect hexagonal se pătrund în unghiu drept, ceia ce probează că unul a suferit o rotaţiune de 90° în jurul unei axe binare a prizmei (Fig. 434). Dar găsim la Staurotidă o cruce ce nu formează un unghiu drept, dar un unghiu de 60° (Fig. 435). De

asemenea găsim un frumos exemplu de maclă prin pătrundere la Mispickel, în care doi cristali compuşi din feţele m şi e^4 se pătrund astfeliu încât planurile e^4 sunt perpendiculare unul pe altul. (Fig. 436).

La *sistemul romboedric* avea maclele prin pătrundere a doi cristali de cvarţ, din care unul dextrogir şi altul levogir. Vom găsi pe un singur cristal feţele plagiedre faţă în faţă, la extremităţile a două muchi verticale, alăturate la partea superioară şi separate la dreapta şi stânga la partea inferioară (Fig. 437). De asemenea, dacă avem doi cristali dextrogiri, care se unesc prin pătrundere (Fig. 438), ei dau un cristal unic în care feţele plagiedre se găsesc înclinate în acelaş sens la partea superioară şi în acelaş sens, dar în direcţie opusă cu cele de sus, la partea inferioară a două muchii laterale alăturate. (Fig. 439). Privit de sus în direcţie verticală un asemenea cristal are aspectul dat de Fig. 440, în care se deosebesc feţele p de $e\frac{1}{2}$: aceste din urmă sunt mate pe când cele d'intâi sunt strălucitoare. Tot aici vom cita macla prin pătrundere a doi romboedri, a căror plan de maclă este p. Acest exemplu de maclă se găseşte la Şabazie (Fig. 441).

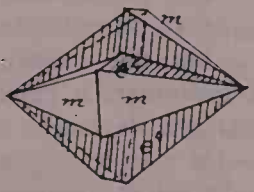


Fig. 436

Fig. 437

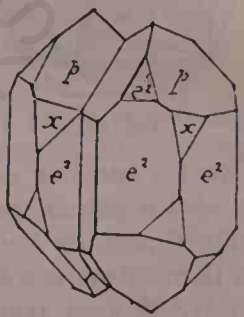


Fig.483

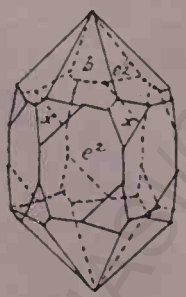


Fig. 439

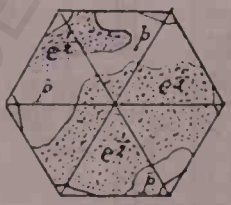


Fig. 440

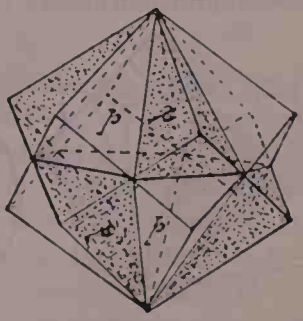


Fig. 441

La *sistemul monoclinic* găsim cazuri particulare de maclă prin pătrundere: aşa, la Filipsit găsim mai întai doi cristali for-

maţi din feţele *m*, *p*. şi *g'*, care se pătrund astfeliu în cât formează un cristal ce pare a fi unic, căci feţele *p* cât şi feţele *g* de pe ambii cristali se găsesc pe aceleaşi planuri (Fig. 442); — pe feţele *g'* apar striajuri paralele cu muchea *mg'*, aşa în cât aceste striajuri formează în jurul centrului feţei, romburi concentrice.—Insă, doi de aceşti cristali cu macla simplă se pot uni în o maclă dublă, după două tipuri: sau că macla simplă e turtită după *p* (Fig. 443), sau după *g'* (Fig. 444).—In fine: trei de aceste macle duble se pătrund în unghiu drept, aşa că for-

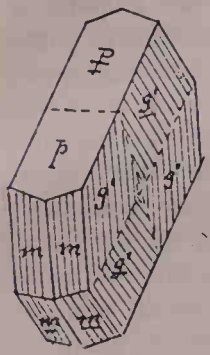


Fig. 442

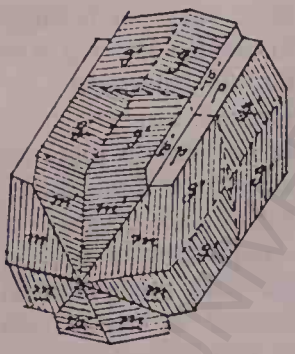


Fig. 443

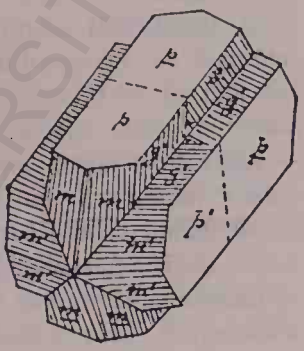


Fig. 444

mează o maclă de 12 indivizi (Fig. 445) care, prin scurtare aduc feţele *m* pe acelaş plan, ceia ce dă în definitiv un cristal având forma unui dodecaedru romboidal cubic, a cărui feţe însă sunt formate din câte 4 regiuni, ce reprezintă feţele *m* (Fig. 446)

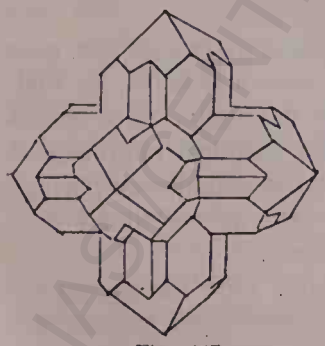


Fig. 445

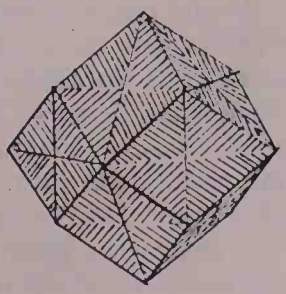


Fig. 446

—Avem astfeliu un exemplu foarte caracteristic de creştere a simetriei prin formare de macle. In adevăr: fiecare individ aparţinând sistemului monoclinic, nu are de cât un plan de simetrie;

prin prima maclare cristalul are aparenţă rombică şi deci trei planuri de simetrie; în macla dublă se găsesc cinci planuri de simetrie căci cristalul are caracterul unei forme tetragonale. In fine, în macla prin pătrundere a celor trei cristali, care par a forma un cristal cubic, găsim nouă planuri de simetrie.

CAP. VII.

Izomorfism şi Polimorfism

Se ştie că, dacă evaporăm cu încetul diverse soluţii de săruri metalice, se obţin cristali, cari pot fi simpli sau grupaţi; şi dacă amestecăm soluţii de diverse săruri şi le evaporăm, se poate întâmpla ca, fiecare din sărurile amestecate să cristalizeze separat, sau să cristalizeze împreună, aşa în cât în unul şi acelaş cristal să găsim elementele ce intră în toate sărurile amestecate. — Aşa: dacă facem un amestec a unei soluţii de sulfat feros, care e monoclinic, cu sulfat de cupru, care e triclinic, constatăm că se depun cristali care conţin ambele substanţe, cristalii având forma şi sistemul substanţei care predomină în soluţii, pe când cantităţile substanţelor conţinute în cristali, variază la infinit.— Mitscherlich, care a studiat mai de aproape aceste fenomene, a constatat că lucrurile pot merge şi mai departe. Aşa: dacă evaporăm la o temperatură cuprinsă între 15^0 şi 20^0 soluţii de diverşi sulfaţi, constatăm că: Sulfaţii de fer şi de cobalt iau forma monoclinică, pe când sulfaţii de magneziu, zinc şi nichel iau forma ortorombică. Dacă însă amestecăm soluţiele acestor sulfaţi, ei cristalizează împreună în ori ce proporţii.

Acestui fapt Mitscherlich i-a dat numele de *Izomorfism*, care este prin urmare proprietatea ce au diverse substanţe, ce cristalizează în acelaş sistem sau în sisteme deosebite, de a cristaliza împreună. Corpurile care pot astfeliu cristaliza împreună se numesc *Izomorfe*. Pentru ca, două sau mai multe corpuri să poată cristaliza împreună, trebue ca să aibă aceiaş formă cristalină şi o compoziţie chimică asemănătoare.

In Mineralogie găsim o serie de fapte, care vin în ajutorul acestei teorii.. Cazul cel mai caracteristic este seria carbonaţilor romboedrici. Constituţia lor chimică corespunde formulei generale CO^3M, în care M este un metal divalent, şi cristalizează în romboedri aproape identici, cu unghiul *p/p* variind foarte puţin. Avem:

Calcita	CO^3Ca	$p/p = 105^0\ 5'$
Dolomia	$CO^3(CaMg)$	$106^0\ 15'$
Dialogita	CO^3Mn	$106^0\ 51'$
Sideroza	CO^3Fe	107^0
Giobertitul	CO^3Mg	$107^0\ 20'$
Smitsonitul	CO^3Zn	$107^0\ 40'$

Trebue de observat că aceste minerale sunt toate optic negative.

Mai există o altă serie de carbonaţi cu constituţie chimică ce corespunde aceleiaşi formule generale, dar care cristalizază în sistemul Ortorombic:

Aragonita	CO^3Ca	$m/m = 116^0\ 10'$
Stronţianita	CO^3Sr	$117^0\ 19'$
Ceruzita	CO^3Pb	$117^0\ 14'$
Witerita	CO^3Ba	$117^0\ 48'$

Urmează apoi: seria Spinelilor a căror compoziţie chimică reprezintă săruri de forma: R^2O^4M în care R este de ordinar: *Al, Fe‴, Cr* iar M este: *Mg, Fe″, Zn, Mn″* ....; seria Apatitei cu clorofosfaţi, cloroarseniaţi, clorovanadaţi izomorfi.

Găsim de asemenea seria izomorfă a grenatelor care corespund formulei generale: $(SiO^4)^3M^2M,^3$ în care: M=Al, Fe‴, Cr iar M′=Ca″ Fe Mg Mn′... şi cristalizază în sistemul cubic, prezentând aproape aceleasi forme: dodecaedrul romboidal, trapezoedrul etc.

Nu mai puţin importantă este seria plaghioclaselor triclinice izomorfe, care, din punct de vedere a compoziţiei lor chimice, sunt amestecuri în proporţiuni variabile de Albit şi Anortit.

— De oare ce ne găsim în faţa unor amestecuri, este evident că proprietăţile corpurilor izomorfe vor fi media proprietăţilor corpurilor ce formează aceste amestecuri. In adevăr: dacă considerăm seria carbonaţilor romboedrici, constatăm că unghiul p/p variază de la $105^0\ 5'$ la Calcită, la $107^0\ 20'$ la Giobertită, aşa în cât la Dolomie, acest unghiu după calcul ar trebui să fie: $106^0\ 12'5$: în realitate este $106^0\ 15'$. De asemenea: unghiurile ce prezintă: Mezitinul cu compoziţia $2\ CO^3Mg + CO^3Fe$. şi Pistomezitul, cu compoziţia $CO^3Mg + CO^3Fe$. (pentru CO^3Mg.... $107^0\ 20'$ şi pentru CO^3Fe... 107^0) ar trebui să fie $107^0\ 13'5''$ pentru cel întâi şi $107^0\ 10'$ pentru al doilea, pe când se găsesc: $107^0\ 14'$ şi $107^0\ 18'$.

După studiile lui Mallard şi Dufet, se găsesc relaţiuni bine definite între proprietăţile optice ale cristalilor compuşi şi a cris-

talilor componenţi, care se pot enunţa astfeliu: *Diferinţa între indicele de refracţiune a unui amestec şi a componenţilor săi, este invers proporţională cu numărul echivalenţilor sărurilor ce se amestecă.*

De asemenea: se poate deduce din cunoaşterea proprietăţilor optice a două sau mai multe substanţe izomorfe, pe acele a unui cristal, ce conţine proporţiuni cunoscute din acele substanţe.

Rezultatele la care s'a ajuns prin aplicarea acestor relaţiuni, sunt destul de satisfăcătoare şi corespund teorielor ce tind a explica constituţia reticulară a cristalilor.

Se găsesc de asemenea cazuri în care, două sau mai multe corpuri cu aceiaş constituţie chimică, de şi nu cristalizază în acelaş sistem, prezintă unghiuri aproape egale. Aşa: Hipersthenul, Bronzitul şi Piroxenele, au aceiaşi compoziţie chimică: SiO^3 (m Mg + nFe); unghiul feţelor m/m este 88° 20′, 88° 16′ şi 87° 6 pentru aceste trei minerale, însă ele nu cristalizază în acelaş sistem: cele două d'intăi sunt ortorombice, pe când Piroxenul e monoclinic. In aceste cazuri se admite că este *Izogonizm* şi nu izomorfizm propriu zis.

S'a încercat să se dee o teorie care să explice izomorfismul, bazată pe parametrii cristalini. In adevăr: Mallard studiind izomorfizmul azotaţilor şi a cloraţilor, a observat că: cloratul de potasiu de şi e monoclinic, cristalizază împreună cu cloratul de sodiu cubic şi cu azotatul de sodiu romboedric; de asemenea: azotaţii de amoniu, potasiu, sodiu şi argint sunt izomorfi, de şi azotatul de sodiu e romboedric, pe când ceilalţi sunt ortorombici. De asemenea se constată că, o parte din aceşti corpi schimbă sistemul cristalin prin încălzire. Aşa: pe când cloratul de sodiu poate fi romboedric sau cubic, azotatul de amoniu, care la temperatura ordinară e ortorombic, devine romboedric prin încălzire peste 87° şi la 127° devine cubic. Asemenea: azotatul de potasiu rombic, devine romboedric la temperatura topirei sale. Pentru explicarea acestor fapte, Mallard a arătat că, nu e în realitate o schimbare a simetriei moleculei, dar că prin faptul că în ultimul loc intervine simetria cubică, în realitate cristalii substanţelor considerate au o simetrie foarte apropiată de cea cubică.

Din consideraţiunile pe care le arată Mallard, rezultă că: dacă admitem că simetria cubică e caracterizată prin trei axe egale, la sistemul patratic există un singur raport, în care două

axe sunt egale iar a treia deosebită (1 : 1 : 0.707) pe când la sistemul romboedric ar exista trei raporturi: 0.577 : 1 : 0.707, 1.225 : 1 : 1.732, şi 0.816 : 1 : 1.414. Din exemplele luate rezultă că: e de ajuns a împărţi parametrii unei substanţe cu cantităţi anumite pentru a-i readuce la parametrii în raporturile date mai sus. Aşa: la azotatul de amoniu găsim raportul axelor: 1.16:1:1.10. şi dacă împărţim primul parametru cu 2 şi al doilea ca $\frac{3}{2}$ găsim: 0.58 şi 0.733, aproape de 0.577 şi 0.707. La azotatul de argint găsim: 0.73 : 1 : 0.69 ce se apropie de 0.707 : 1 : 0.707, dedus din raportul 1.414 : 1 : 1.414 în care parametrii au fost împărţiţi prin 2. Rezultă din cele precedente că, pentru foarte multe substanţe *putem reduce parametrii cristalografici la acei ai sistemului cubic, împărţindu-i prin coeficienţi care reprezintă raporturi între numerii 1, 2, 3 şi 4.* De aici ipoteza că, toate corpurile au o reţea aproape cubică, ceiace este în legătură cu constituţia corpurilor consideraţi ca formaţi din molecule sferice, care se pot înlocui cu octaedri regulaţi.

Dacă, după cum am văzut în cele precedente, există corpuri care au aceiaş formă cristalină, putând cristaliza împreună, găsim însă corpuri care, fără să-şi schimbe constituţia chimică, să cristalizeze în sisteme deosebite sau în acelaş sistem cristalin, dar prezentând raporturi parametrice deosebite. Acestei proprietăţi s'a dat numele de *Dimorfism* sau în general de *Polimorfism.* Putem lua ca exemplu în primul loc anhidrida titanică TiO^2, care cristalizează sub numele de *Rutil,* în sistemul patratic cu raportul parametric 1 ; 1 : 0.911 ; apoi sub numele de *Anatas* tot în sistemul patratic, dar cu raportul parametric: 1 : 1 : 3.554, deci de patru ori axa verticală a Rutitului; şi în fine sub numele de *Brookit,* cristalizând în sistemul ortorombic. Avem apoi: Carbonatul de Calciu romboedric cu numele de *Calcită,* şi ortorombic sub numele de *Aragonită;* Bisulfura de fer cubică sub numele de *Firită* şi ortorombică sub numele de *Marcasită.*

S'a constatat că una şi aceiaş substanţă cristalizează în sisteme deosebite, după condiţiunile fizice deosebite în care se produce cristalizarea; în particular temperatura joacă un rol important. Aşa: după experienţele lui Rose ar rezulta că, precipitând apa de var prin un curent de anhidridă carbonică, sau precipitând clorura de calciu cu carbonat de amoniu la temperatura ordinară, se formează romboedri de Calcită; dar dacă operaţia se face între 90° şi 100°, se formează prizme de Aragonită. De asemenea Hautefeuille în studiele lui asupra anhidridei

titanice a constatat că: prin acţiunea vapoarei de apă asupra fluorurei de titan se pot obţine rutiiul, brookitul sau anatazul după cum temperatura era: la roş, la volatizarea zincului sau la volatizarea cadmiului şi în acelaş timp densităţile produselor erau deosebite: Anatas 3.9, Brookit 4.67, Rutil 4.25.

Din aceste exemple şi altele se vede uşor că, temperatura are un rol important în ce priveşte forma cristalină obţinută.

După experienţele lui Lecoq de Boisbaudran rezultă că polimorfismul e mult mai frecvent de cât ne-am închipui, şi că sunt şi alte cauze de cât temperatura ce pot produce schimbarea sistemului cristalin. Aşa: dacă lăsăm să cristalizeze spontan o soluţie saturată de sulfat feros, se obţin cristali clinorombici de SO^4Fe7H^2O; dacă însă introducem un cristal ortorombic de sulfat de nikel se formează cristali ortorombici de acelaş sulfat, dar cari mai târziu când se formează cristali clinorombici, aceştia, încetul cu încetul distrug pe cei întâi. Dacă însă în aceiaş soluţie introducem un cristal de sulfat de cupru $SO^4Cu\ 5H^2O$ triclinic, se obţin cristali de sulfat feros triclinici $SO^4Fe\ 5H^2O$ însă foarte puţin stabili; în fine, dacă introducem cristali de $SO^4Co\ 6\ H^2O$ obţinut la 50^0, se obţin cristali clinorombici $SO^4Fe\ 6H^2O$.

Pentru explicarea acestor fenomene s'au emis două hipoteze; 1^0 sau că ele se datoresc schimbării grupării moleculare sau. 2^0 că se datoresc existenţei aşa numitei *simetrii limite*. In acest din urmă caz, se constată că forma cea mai simetrică este forma limită a celei mai puţin simetrică. Aşa la Brookit avem raportul. 0.842 : 1 : 0.472, dacă dublăm parametrul relativ la axa verticală. găsim: 0.842 : 1 : 0.944, deci: două axe, prima şi ultima sunt aproape egale ceia ce se poate exprima zicând că substanţa e pseudo-patratică. De asemenea dacă la rutil facem axa verticala 0.842, axa orizontală devine 0.94 egală cu acea a Brookitului. Deci Brookitul are o formă limită apropietă de a Rutitului, pe care o putem aduce la acea a Anatasului, împărţind axa verticală prin 4: (3.554 : 4 = 0.888 (0.911).

CAP. VIII

Goniometrie

Am văzut în generalităţile asupra cristalografiei geometrice, că pentru determinarea formelor cristaline nu trebue a ne adresa formei feţelor cristalului, dar unghiurilor diedre pe care aceste feţe le fac între ele. S'a spus că, aparatele cu ajutorul cărora se pot

măsura unghiurile diedre a cristalilor se numesc *Goniometre*.

In cele ce urmează ne vom ocupa cu descrierea acestor aparate, precum şi cu întrebuinţarea lor.

Primul şi cel mai simplu din aceste aparate a fost *Goniometrul de aplicaţie* imaginat de *Carangeot* şi utilizat mai ales de către *Romé pe Lisle* pentru a proba exactitatea principiului constanţei unghiurilor; descoperit de către el, şi apoi de către abatele francez *Haüy*, creatorul Cristalografiei. El se compune din două părţi: un semicerc metalic (Fig. 447). ABC împărţit în grade şi jumătăţi de grad; pe acest semicerc se poate aplica a doua parte a aparatului compusă din un feliu de compas, format din două lame de metal OD şi OE care se încrucişează în punctul O unde sunt reunite prin o axă cu şurub de presiune, în jurul căreia lamele se pot întoarce. Pentru a face măsura diedrului unui cristal, se aplică aceste lame, pe cât posibil de exact, pe feţele ce formează diedrul ce voim a măsura, aşa că, planul lamelor să fie perpendicular pe muche. Se fixează deschiderea lamelor în poziţiunea lor definitivă cu ajutorul şurubului şi apoi se transportă acest compas pe semicercul graduat, aşa ca axa sa să coincidă cu centrul semicercului, iar una din lame cu diametrul; se citeşte în urmă unghiul pe limbul cercului graduat.

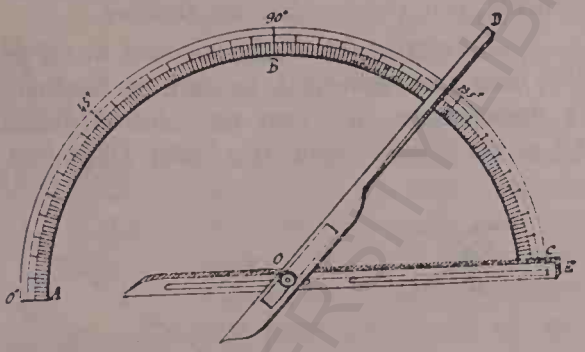


Fig. 447

Acest aparat a fost perfecţionat de către diverşi constructori, astfeliu că, cele două lame metalice sunt aplicate pe cercul graduat şi fixate în centru cu o axă şi un şurub; în acest caz măsura şi cetirea unghiului se face mai exact şi mai comod.

Acest aparat precum şi modul lui de întrebuinţare, care în mânele lui Haüy şi a altor cristalografi a dat rezultate aşa de bune, prezintă totuşi mari defecte: mai întâi fiindcă nu se pot face măsuri de cât pe cristali mari; şi apoi fiindcă, feţele cristalilor mari nefiind perfect plane, nu putem atinge o mare exactitate în măsuri, cel mult cu o aproximaţie de 30′, eroarea putând ajunge până la 5°.

S'au construit aparate în care, măsura se poate face pe cristali mici, care având feţele mai plane şi mai strălucitoare, se pot face măsuri mult mai exacte. Aceste sunt: *Goniometrele cu reflexiune*, care se construesc după două modele: primul cu axa orizontală sau *Geniometrul lui Wollaston*; şi al doilea cu axă verticală, sau *Goniometrul lui Babinet*.

Goniometrul lui Wollaston fiind bazat pe reflexiune, să vedem care este principiul pe care se bazează întrebuinţarea lui. Să presupunem că avem de măsurat diedrul format de feţele AB şi BC a unui cristal (Fig. 448). Dispunem cristalul aşa încât

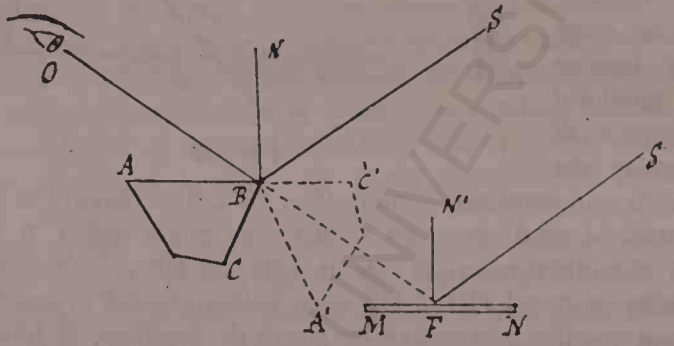


Fig. 448

planul feţei AB să fie orizontal, aşa ca, raza SB ce vine de la punctul luminos S, după reflexiune să ia direcţia BO, venind în O, în ochiul observatorului. Dacă MN reprezintă suprafaţa unei oglinzi plane aşezată sub cristal, şi dacă punctul S este destul de îndepărtat, putem presupune că, o altă rază SF care cade pe oglindă vine paralel cu SB şi după reflexie ia direcţiunea FBO, coincidând cu raza BO aşa ca, cele două imagini pe faţa AB şi pe oglinda MN se suprapun în ochiul observatorului. Dacă ochiul observatorului rămâne fix în O, şi noi întoarcem cristalul în jurul muchei ce se proiectează în B, până când faţa BC a cristalului devine orizontală, deci pe prelungirea lui AB, în poziţiunea BC', atunci ochiul observatorului rămas fix, va vedea imaginea de pe faţa AB mişcându-se şi apoi dispărând pe când imagina de pe oglindă rămâne fixă, pentru a reapare din nou, formată de astă dată de faţa BC' şi putând fi adusă din nou în coincidenţă cu imagina fixă de pe oglindă; aceasta însă cu condiţia ca, muchea ce se projectează în B să nu-şi schimbe poziţiunea. Este uşor

de văzut că, unghiul CBC', de care a trebuit să întoarcem cristalul, este suplimentul unghiului ABC, ce voim a măsura.

Să vedem acum cum e compus Goniometrul lui Wollaston şi modul cum trebue să ne servim de el.

Acest Goniometru se compune (Fig. 449) din un disc metalic C, graduat pe margina sa în grade şi jumătăţi de grade, mobil în faţa unui vernier V, în jurul unei axe verticale AS. La extremitatea S a axei se fixază cristalul pe un suport special, format din mai multe piese articulate, care permit de *a centra cristalul*, adică a-l aranja astfeliu încât muchea diedrului ce voim a măsura să fie orizontală şi pe prelungirea axei AS a aparatului. Această operaţiune, care e delicată şi destul de grea, şi de la exactitatea căreia depinde o bună măsură de unghiu, are nevoie de oare cari explicaţiuni, pe care le vom da mai târziu. Axa AS se poate întoarce cu ajutorul unui buton A, în mod independent de discul C; pentru a putea întoarce în acelaş timp discul şi axa, ne servim de butonul B. Pentru a fixa discul C ne servim de un şurub de presiune D, şi când voim a-l pune la 0^0 atunci ne servim de o axă cu şurub fără sfârşit E. Tot aparatul e fixat pe un trepied, ce poate fi pus într'un plan orizontal cu ajutorul a trei şuruburi fără sfârşit, care străbat cele trei picioare ale aparatului. Pe planul trepiedului se află fixată o oglindă de sticlă neagră G, care ne dă ceia ce se chiamă *reperul*, adică imagina fixă a punctului luminos, care se numeşte *miră*. Această miră, care poate fi formată fie de muchea unui acoperemânt sau a unui ogeag, fie prin un obiect luminos, precum flacăra unei lumănări sau a unei lampe etc, trebue să fie la o distanţă de cel puţin 10 metri înaintea aparatului.

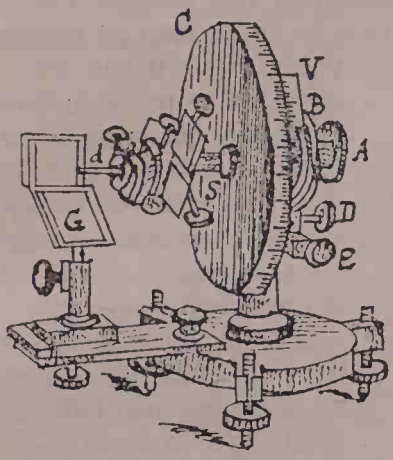


Fig. 449

Mineralogistul francez *Mallard* a imaginat un aparat accesoriu, care permite de a avea o miră la o mică distanţă, care ne dă o imagină venind de la infinit, ceia ce ne permite a lucra ori şi unde. Acest aparat, care este un adevărat *Colimator*

(Fig. 450) se compune din un larg tub metalic, prezentând la una din extremităţi un semnal, format din o deschidere A de formă variată şi care poate fi luminat într'un mod oare care. Acest semnal este în focarul unei lentile, care se găseşte la cea laltă extremitate a tubului, astfeliu că imagina deschiderei apare la infinit şi razele care cad pe Goniometru sunt paralele. Pentru ca imagina deschiderei să poată căde în acelaş timp pe oglinda şi pe cristal, trebue ca oglinda să se poată apropie de cristal, ceia ce se obţine fixând oglinda pe un cilindru, care poate să se suie sau să se scoboare cu ajutorul unui sistem de mişcare cu cremalieră şi un şurub.

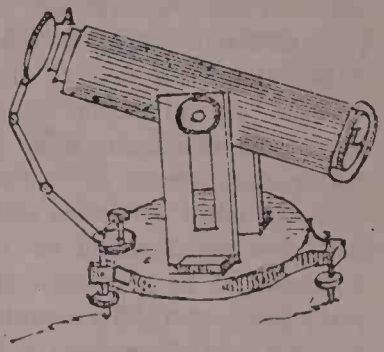


Fig. 450

Iată acum modul de a face o măsură de unghiu. Se aranjează mai întâi aparatul aşa ca planul piciorului ce suportă Goniometrul să fie orizontal, servindu-ne de o nivelă şi făcând să funcţioneze şuruburile fără sfârşit ale piciorului. Dacă ne servim de o mică trebue ca planul discului să treacă prin mică; dacă ne servim de colimator, căutăm să aranjăm aparatul aşa, ca să putem vede imagina deschiderei în mijlocul oglinzei negre. Procedăm apoi la centrarea cristalului, operaţiune care are de scop de a aduce muchea diedrului ce voim a măsura, ca să fie pe prelungirea axei aparatului, deci orizontală, căci noi am văzut că, pentru a face o măsură exactă trebue ca cristalul să se întoarcă în jurul acestei muchi, care trebue să rămână în prelungirea axei. Procedăm atunci în modul următor: începem prin a desprinde mica piesă în formă de disc *d*, pe care se fixează cristalul cu ajutorul unei bucăţele de ceară aşa că, muchea diedrului să fie pe cât posibil pe prelungirea axei discului şi deci şi a axei aparatului şi în o poziţiune cât mai apropiată de orizontală. Fiindcă nu se poate ajunge direct la acest rezultat, se construeşte un suport special, compus din mai multe piese mobile şi care e dispus astfeliu: Axa goniometrului este terminată cu o mică săniuţă plană P (Fig. 451) care se poate misca într'un plan vertical mergând înainte sau îndărăt cu ajutorul unui şurub *p*; urmează apoi o altă săniuţă P' plană care se mişcă însă într'o direcţiune perpendiculară pe a celei

dintâi, sau, pentru a preciza mai bine, dacă prima se mişcă de sus în jos, a doua trebue să se mişte de înainte îndărăpt, sau vice-versa. Prin aceste două mişcări putem aduce muchea diedrului în prelungirea axei aparatului. Dar trebue ca această muche să fie şi paralelă cu axa; pentru a ajunge la acest rezultat, ne servim de alte două săniuţi, însă curbe. Indată după săniuţa plană P' vine o altă săniuţă curbă S, mobilă cu ajutorul

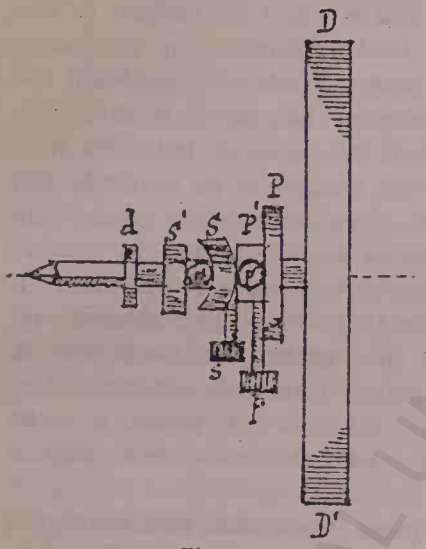


Fig. 451

şurubului *S* într'un plan paralel cu P, dând însă cristalului mişcări unghiulare; o ultimă săniuţă S' mobilă cu ajutorul şurubului s' dă cristalului mişcări unghiulare, însă într'un plan paralel cu P'. Este evident că, mişcările pe care trebue să le dăm acestor piese depind de poziţia deplasată a imaginei văzută pe faţa cristalului, în raport cu imagina fixă de pe oglindă, care imagini trebue să coincidă una cu alta, când voim a face măsura unghiului. Iată dar cum se procede: după ce s'a fixat cristalul pe discul *d*, acesta este pus la locul lui şi fixat cu un şurub de presiune; apropiem atunci ochiul de cristal aşa ca să vedem imagina mirei în oglinda neagră şi căutăm să vedem imagina reflectată pe una din feţele diedrului ce voim a măsura întorcând axa şi cu ea cristalul, cu ajutorul butonului A; să presupunem că, imagina de pe cristal e la stânga imaginei fixe văzută pe oglinda neagră; atunci, mişcând una din săniuţele curbe S sau S', după cum cere poziţia diedrului în raport cu axa aparatului, şi aducem imgina spre dreapta până ce coincide cu cea fixă. Atunci fără a schimba poziţiunea ochiului, întoarcem axa aparatului, pentru a avea imagina pe faţa a doua a diedrului; dacă ea coincide cu imagina fixă, cristalul e centrat, ceia ce se întâmplă foarte rar; fiindcă cele mai de multe ori coincidenţa nu există, dăm mişcare lui S' sau S, până ce avem din nou coincidenţa. Revenind la faţa întâia, pentru a vede dacă perzistă coincidenţa, în caz contrar dăm mişcări lui S' sau S până la coincidenţă, şi aşa mai departe până ce cristalul e cen-

trat, adică, am obținut coincidența celor două imagini pe ambele fețe a diedrului ce voim a măsura. Numai acum putem proceda la măsura unghiului. Incepem prin a înturna discul cu ajutorul butonului B, până când diviziunea O^0 de pe disc coincide cu O^0 al vernierului; pentru a obține coincidența exactă, privim diviziunele cu o lupă și, servindu-ne de șurubul D și de axa E, dăm discului mișcări foarte mici; dacă șurubul D este bine strâns, discul C nu se mai poate mișca cu butonul B. Coincidența celor două diviziuni O^0 fiind obținută, fixăm poziționea ochiului, întoarcem butonul A pentru a aduce coincidența pe prima față a diedrului, apoi desfacem șurubul D și, fără a atinge butonul A, dăm discului C, cu ajutorul butonului B, o mișcare pentru a aduce coincidența imaginelor pe cea-l-altă față a diedrului; și fiindcă uneori este greu de a aduce coincidența servindu-ne de butonul B, ne servim atunci din nou de șurubul D și de axa E. In urma acestora putem mișca ochiul pentru a ceti unghiul măsurat; pentru aceasta cetim pe disc numărul de grade corespunzător lui O^0 de pe vernier, iar fracțiunele de grad, exprimate în minunte, se obțin cu ajutorul vernierului. Unghiul cetit este suplimentul unghiului adevărat; pentru a avea deci valoarea unghiului adevărat, va trebui să scădem unghiul cetit din 180 sau 179^0 60′.

Pentru a înțelege întrebuințarea vernierului, este necesar a arata teoria acestui instrument.

Sunt două feluri de vernier: *vernierul rectiliniu* și *vernierul circular.*

Vernierul rectiliniu se compune: din o linie fixă AB divizată în milimetri contra căreia poate luneca o liniuță numită *vernier* și care, având o lungime de 9 milimetri, este împărțită în 10 părți egale, așa că, fiecare diviziune a vernierului diferă cu $^1/_{10}$ de milimetru, de o diviziune de pe linia cea mare (Fig. 452). Daca voim a măsura o lungime AB, facem să coincidă una din extremitățile sale cu diviziunea O^0 de pe linia mare, apoi facem să lunece vernierul până ce diviziunea sa O^0 atinge cealalta extremitate a lungimei (Fig. 453). Presupunem că, lungimea AB acopere 4 milimetri și o fracțiune de milimetru, pe care trebue

Fig. 452

a o determina. Pentru aceasta observăm care este diviziunea vernierului, care coincide cu o diviziune de pe linia mare; în figură vedem că este linia a treia şi, fiindcă fiecare diviziune reprezintă o diferinţă de $^1/_{10}$ de milimetru, cele trei diviziuni astfeliu fixate, reprezintă $^3/_{10}$ de milimetru. Deci, lungimea AB este de: 0^m C043.

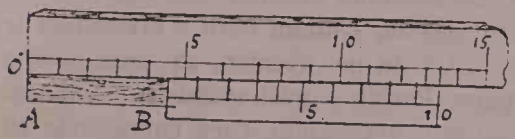


Fig. 453

Acest vernier se numeşte: *Vernier la* $^1/_{10}$ ceia ce însamnă că, ne dă măsurile cu o aproximaţie de $^1/_{10}$ de milimetru. Dacă voim a ave o aproximaţie mai mare, d. ex. la $^1/_{20}$ dăm vernierului o lungime de 19 m. m. şi-l devizăm în 20 părţi. Se construesc verniere care dau o aproximaţie de $^1/_{100}$ însă în acest caz cetirea se face foarte greu, servindu-ne chiar cu o lupă cemăreşte foarte tare.

Vernierele circulare, Servesc la măsurarea arcurilor de cerc sau a unghiurilor, şi atunci valoarea lor se exprimă în grade, minute, secunde şi fracţiuni de secundă, după gradul aproximaţiunei ce putem obţine. Aproximaţiunea este cu atât mai mare, cu cât raza cercului e mai mare, căci, cu cât raza e mai mare, cu atât şi circonferinţa e mai mare, şi prin urmare sunt mai mari lungimele arcurilor ce reprezintă gradele şi posibilitatea de a le împărţi într'un număr mai mare de diviziuni.

Fie M N o porţiune de cerc divizată în grade; vernierul VV' este susţinut de o alidadă şi se mişcă contra cercului mare; (Fig. 454) el are o lungime de 29° şi e divizat în 30 părţi egale; deci diferinţa între diviziunele vernierului şi a cercului este de $\frac{1^o}{30}$ sau $\frac{60}{30}=2'$. In aparatele mai mari de preciziune, se divide gradul în 12 părţi, aşa că, fiecare diviziune valorează 5'; vernierul este la $^1/_{60}$ deci ocupă o lungime de 59 diviziuni şi e împărţit în 60 părţi egale. Lungimea totală a vernierului fiind de: $5' \times 59 \quad 295' = 4^o55'$, fiecare diviziune valorează deci: $\frac{295'}{60}=4'.55''$ şi fiind că, fiecare diviziune a cercului valorează 5', diferenţa e de 5", care reprezintă aproximaţia măsurei, limita extremă a exactităţii.

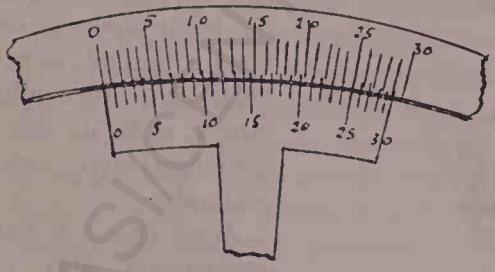


Fig. 454

In goniometrele lui Wolaston model nou curent, cercul e împărţit în grade şi jumătăţi de grad, deci, fiecare diviziune valorează 30′; vernierul fiind la $^{1}/_{30}$ adică 29 diviziuni a cercului corespund cu 30 diviziuni a vernierului, aproximaţia măsurei este deci de 1′. Pentru a face o lectură de unghiu, căutăm care e diviziunea de pe cerc, care corespunde cu 0° de pe vernier: să presupunem că este 28° 30′ şi o fracţiune. Pentru a găsi valoarea fracţiunei, se determină care e diviziunea vernierului, care corespunde cu o diviziune oare care de pe cerc: fie diviziunea 17; deci fracţiunea valorează 1′, şi deci, valoarea exactă a unghiului măsurat este de 28° 47′. O bună măsură de unghiu nu cere o aproximaţie mai mare de cât 10′.

Goniometrul lui Babinet. După cum s'a spus, acest aparat se deosebeşte de acel a lui Wollaston prin aceia că, axa sa este verticală. El se compune dintr'un limb orizontal L, divizat pe margină în grade şi subdiviziuni, după mărimea aparatului.

Prin centrul limbului trece o axă verticală A S care suportă aparatul şi are la extremitatea sa superioară sistemul S care serveşte la centrarea cristalului. In jurul axei se întorc două braţe care susţin: unul un colimator *C*, altul o lunetă *B*. Un isvor de lumină oare care, luminează deschiderea colimatorului şi dă un fascicol de raze paralele, care cade pe una din feţele diedrului ce voim a măsura, se reflectează şi trece prin lunetă, unde dă imagina deschiderei colimatorului.

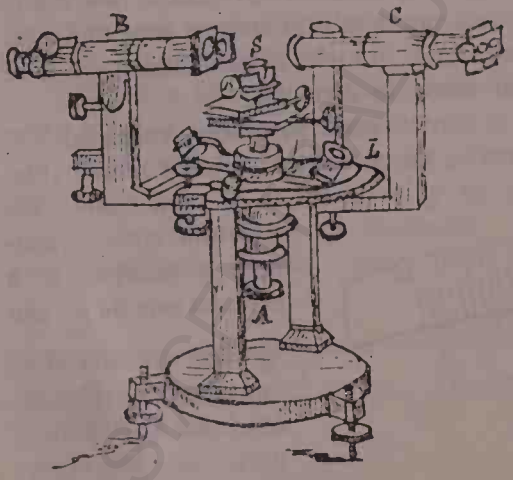


Fig. 455

Acest aparat a fost perfecţionat atât în Franţa, unde este construit mai ales de către constructorul Picard, cât şi în Germania, unde casa Fuess din Berlin, construeşte sub numele de *Universal apparat* un Goniometru, care este foarte bine dispus pentru măsurarea unghiurilor cristalilor, şi care poate servi şi la măsura unghiului axelor optice a cristalilor.

PARTEA II-a

Cristalografia fizică

I

Fenomene optice

Fenomenele optice joacă un mare rol în Mineralogie şi mai ales în Petrografie; vom vede mai târziu că Petrografia a început a exista din momentul în care a început a se întrebuinţa studiul proprietăţilor optice în mineralogie. De aceia vom căuta a expune în cele ce urmează, mai întâi rezumatul cunoştinţelor teoretice asupra fenomenelor luminoase, şi apoi vom arata partea practică a acestui subiect, insistând asupra întrebuinţării aparatelor ce servesc la studiul acestor fenomene, cu aplicare la minerale şi mai ales la mineralele ce intră în constituţia rocelor.

CAP. I

Fenomene generale

Pentru a se studia în optică fenomenele luminoase se admite existenţa unui corp ponderabil foarte subtil, foarte puţin dens şi foarte elastic, numit *Eter luminos;* el se găseşte în spaţiile intermoleculare, şi peste tot locul unde nu este materie: în vid, în spaţiele interplanetare etc.

Pentru explicarea fenomenelor optice, se admite *teoria undulaţiunelor.* După această teorie, când un corp este luminos, moleculele sale se găsesc în o stare de mişcare undulătoare, analoagă cu mişcarea pendulară; această mişcare se transmite corpurilor încunjurătoare prin intermediarul eterului, sub formă de *unde,* care ajung în contact cu ochiul nostru, ne face să simţim impresiunea acestei mişcări, şi ne dă astfeliu impresia luminoasă.

Această mişcare vibrătoare se produce şi se propagă după nişte legi pe care trebue să le precizăm de la început.

Se admite că, lumina se propagă în linie dreaptă, iar miş-

carea vibrătoare se face în un plan perpendicular pe direcţia de propagare şi in azimuturi care pot să varieze sau sunt determinate.

Să considerăm o moleculă M în repaos sub influenţa mai multor forţe în echilibru, care sunt forţele de atracţiune a moleculelor înconjurătoare (Fig. 456); să admitem că dăm acestei molecule o impulsiune în direcţiunea Mx şi că sub influenţa acestei impulsiuni, ea ajunge în M', pentru îndepărtarea cea mai mare.

Fig. 456

In acest moment forţele care lucrează asupra moleculei, tind a se pune din nou în echilibru şi a aduce molecula din poziţiunea M' în M; se întâmplă acelaş lucru ca şi când molecula ar cădе din M' în M, —şi prin urmare în timpul acestei căderi, molecula a câştigat o viteză egală şi de sens contrar impulsiunei primitive, în virtutea căreia ea trece de poziţia sa de echilibru M şi ajunge în M, poziţie simetrică lui M', în raport cu M. Insă, când molecula a ajuns în M, forţele care lucrează continuu asupra ei, caută să revină în echilibru şi aduc molecula în poziţia sa de repaos M. Mişcarea aceasta se va continua la infinit, cât timp molecula nu va pierde forţa vie pe care a capatat'o prin prima impulsiune ce i s'a dat. In acest mod se defineşte *mişcarea vibrătoare.*

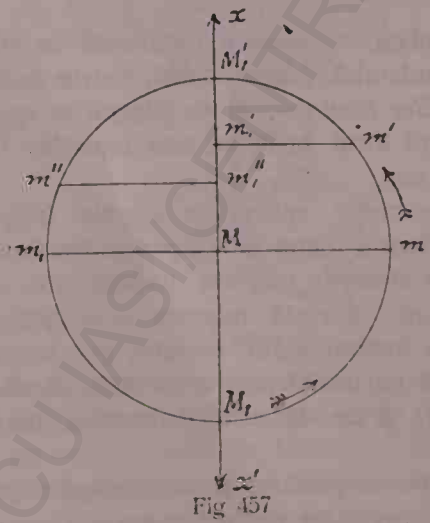


Fig. 457

Mişcarea complectă, adică de la poziţia primitivă M, până în poziţiele extreme M' şi M, şi iarăşi în M, se numeşte o *vibraţie întreagă.* Direcţia Mx a mişcării se numeşte *trajectorie;* distanţa MM' maxima, se numeşte *Amplitudine* iar timpul ce pune molecula pentru a face o vibraţie întreagă, se numeşte *Periodă.*

Putem reprezenta mişcarea vibrătoare şi în alt mod (Fig. 457), considerând-o ca proiecţiunea pe trajectorie a mişcării unui punct *m*, mobil pe circonferinţa descrisă din un punct M ca cen-

tru, cu o rază egală cu amplitudinea. Când punctul e în repaos în m, proiecţia sa pe trajectorie este M. Dacă punctul parcurge circonferenţa de jos în sus şi de la dreapta la stânga, deci spre M', este evident că, pentru poziţia m', proiecţia sa va fi în m', şi când punctul a descris un sfert de circonferenţă, poziţia sa M', se confundă cu proiecţia sa pe trajectorie. Până acum sensul mişcării a fost *pozitiv*; dacă mişcarea continuă, mobilul parcurge circonferenţa de sus în jos, deci în sens *negativ*: aşa când mobilul este în m', proiecţia sa este în m', iar mişcarea e de *sens contrar*. Când mobilul este în m, deci a descris o jumătate de circonferenţă, proiecţia sa este în M poziţiunea iniţială de repaos pe trajectorie. Ajuns în M, mobilul se confundă cu proiecţia sa, şi de aci înainte sensul mişcării devine din nou pozitiv:—când ajunge în m, punctul de plecare, proiecţia e din nou în M, după ce a parcurs o circonferenţă întreagă. Deci: cât timp mobilul a parcurs circonferenţa întreagă, molecula M a împlinit o vibraţiune întreagă. Este evident că molecula M s'a mişcat de la M, la M', în ses pozitiv, iar de la M', la M, în sens negativ, având în cazul întâi o viteză pozitivă, şi în al doilea, o viteză negativă.

In această nouă reprezentare a mişcării vibrătoare, *Amplitudinea* mişcării este raza circonferenţei; *perioda* este timpul întrebuinţat pentru ca mobilul să parcurgă circonferenţa întreagă, iar distanţa parcursă în timpul unei periode se numeşte: *lungime de undulaţie*.

— Pentru a determina însă complect mişcarea vibrătoare trebue să definim încă *Faza mişcării*, adeca, poziţia mobilului pe circonferenţă, sau a proiecţiei sale pe trajectorie, într'un moment dat. Dacă însemnăm cu T perioda, este evident că pentru un timp $\frac{T}{4}$, mobilul va parcurge un sfert de circonferenţă adică: $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, iar molecula face un sfert de undulaţiune: însemnând cu λ lungimea de undulaţiune, molecula va fi făcut $\frac{\lambda}{4}$. Pentru prescurtare, λ se numeşte *lungime de undă*.

Pentru a face să se înţeleagă mai bine noţiunea de fază, să considerăm pe circonferinţă, două mobile: m_0 şi n_0 având între ele distanţa constantă $M_0 N_0$ şi având aceiaş viteză şi acelaş sens de mişcare (Fig. 458). Dacă considerăm proiecţiunele M şi M_0 pe trajectorie, vom admite că asupra moleculei M lucrează două forţe una după alta, care-i dau două mişcări de aceiaş direcţie, având aceiaş periodă şi aceiaş amplitudine; deci, când prima

forţă a adus molecula în M_0 atunci începe acţiunea celei a doua forţă asupra altei molecule rămasă în M. Este evident că sub influenţa acestor două forţe se va produce o mişcare rezultantă. Se numeşte *Fază* a acestei mişcări, distanţa constantă $m_0 n_0$ a celor două mobile, sau distanţa $M M_0$ a celor două poziţiuni iniţiale a mişcărei moleculei, sub influenţa celor două forţe.

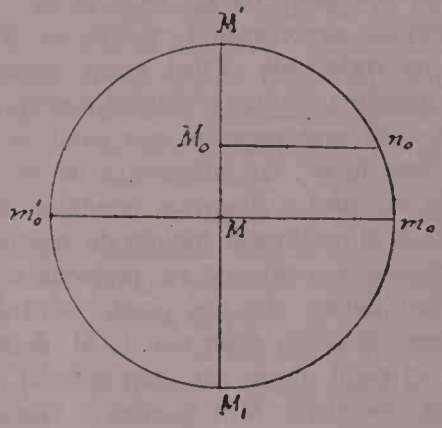


Fig. 458

Este evident că: dacă cele două mobile se confundă, faza este nulă, şi prin urmare cele două mişcări se adaogă. Dacă faza este o jumătate de circonferinţă π, cele două mobile ocupă poziţiele m_0 şi m'_0; dacă pornesc în acelaş moment, primul va ave o mişcare pozitivă, iar al doilea o mişcare negativă şi fiind că au aceiaş viteză, când m_0 va ajunge în M'; atunci m'_0 ajunge în M, projecţiunele acestor două mişcări pe trajectorie fiind MM' şi MM, şi fiind că ele sunt egale şi de sens contrar, este evident că vibraţia rezultantă va fi nulă. Deci: pentru o fază egală cu zero, mişcarea vibrătoare va fi maximum, iar pentru o fază egală cu o semi-circonferenţă, mişcarea va fi nulă. Pentru poziţiuni intermediare între faza egală cu zero şi acea egală cu π, mişcarea va fi proporţională cu această fază.

Mişcarea mobilului m pe circonferenţă este o mişcare oscilatorie curbilinie sau o mişcare pendulară de mică amplitudine, pe când mişcarea projecţiunei sale pe diametrul M'M, este o mişcare oscilatorie rectilinie; aceste două mişcări sunt identice şi trebue să fie reprezentate prin aceleaşi ecvaţiuni.

Dacă însemnăm cu a raza cercului, care este trajectoria mişcării rectilinii, viteza de mişcare a mobilului pe circonferenţă după formulele pendulului va fi:

$$V = a \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dacă luăm ca origină a timpurilor, momentul în care mobilul pleacă din m_0 (Fig. 459) pe când projecţiunea pleacă din acelaş punct, pe diametrul corespondent şi fiind că origina spaţielor pentru distanţele parcurse pe diametru este centrul M, este evident ca

după timpul t, în momentul când mobilul ajunge în m, pe circonferență, proiecția sa este în n,; dacă vom pune: Mn, = S atunci în triunghiul Mm, n, vom ave:

$$S = Mm, \cos n, Mm, = a \cos n, Mm,$$

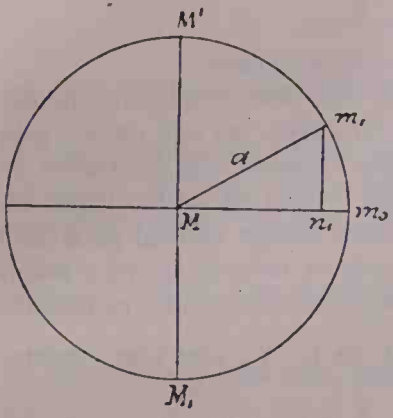


Fig. 459

și fiind că unghiul la centru n, Mm, este măsurat prin raportul arcului cuprins la rază, vom putea scrie:

$$s = a \cos \frac{m_0 m,}{a}$$

și fiind că $m_0 m$, este spațiul parcurs în timpul t cu viteza V, vom ave:

$$s = a \cos \frac{vt}{a}$$

Insă din egalitatea $v = a \sqrt{\frac{g}{l}}$ scoatem:

$\frac{v}{a} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, sau înmulțind cu t vom ave:

$$\frac{vt}{a} = t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Inlocuind în valoarea lui s avem:

$$S = a \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aceasta este formula spațielor, analoagă cu acea a mișcării pendulare.

Pentru a ave valoarea vitezei, este de ajuns a lua derivata, în raport cu timpul, a ecvației spațielor și vom ave:

$$v = \frac{ds}{dt} = - a \sqrt{\frac{g}{l}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

dacă punem: $a \sqrt{\frac{g}{l}} = b$, vom ave:

$$v = - b \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

formulă identică cu acea ce ne dă viteza mișcării pendulare.

Şi, fiind că timpul T a unei oscilaţiuni întregi este egal cu timpul ce pune mobilul pentru a parcurge circonferenţa, vom ave:

$$T = \frac{S}{v} = \frac{\pi a}{v} = \frac{\Pi a}{a\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Formulă analoagă cu acea a mişcării pendulare.

Mişcarea pe diametrul $m_0\ m'_0$ care este o mişcare undulatoare rectilinie, este tipul mişcării vibrătoare: ea este definită prin cele trei formule ce am stabilit. Insă această mişcare trebue să fie produsă prin acţiunea unei forţe. Putem să ne închipuim că, centrul M este sediul unei puteri, care atrage mobilul m_0 şi fiind că această atracţiune e proporţională cu masa mobilului şi invers proporţională cu distanţa, este evident că, atracţiunea pe unitatea de masă şi la unitatea de distanţă va fi: $\frac{g}{l}$, care este caracteristică pentru forţă. Dacă punem: $\frac{g}{l} = \beta$.

cele trei ecvaţii precedente devin:

$$S = a \cos t\sqrt{\beta}.$$

$$v = -b \sin t\sqrt{\beta}.$$

$$\text{şi } T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$$

şi atunci valoarea lui $b = a\sqrt{\frac{g}{l}}$ devine:

$$b = a\sqrt{\beta}$$

De ordinar se dă acestor formule o altă expresiune, eliminând pe β. In adevăr: să punem: $\tau = 2T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}$ de unde:

$$\sqrt{\beta} = \frac{2\pi}{\tau}$$

Să înlocuim această valoare în egalităţile precedente: vom ave:

$$S = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

$$V = -b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Formula (β) ne va servi, mai ales, în studiul fenomenelor optice. In această formulă, b reprezintă viteza maximă sau amptitudinea, iar τ este durata unei oscilaţiuni complecte. Formula ne dă viteza v în timpul t.

——— . — Să considerăm acum o moleculă animată de o mişcare vibrătoare reprezentată prin ecvaţia: $v = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$.

Această mişcare va ajunge după un timp t', la o distanţă d, cu viteza V'. Molecula care a primit această mişcare, va începe a executa mişcarea, pe care prima moleculă o executa pornind de la $t = o$; viteza sa va fi dată prin formula: $v' = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t'}{\tau}\right)$

în care: $t' = \frac{d}{V}$ care este faza mişcării.

Vom pute deci scrie:

$$v' = b \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - t'\right)$$

Fiind că t' este o constantă o putem însemna cu φ, şi atunci mişcarea vibrătoare poate fi reprezentată prin formula:

$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \varphi\right)$$

în care: a este amplitudinea, τ durata unei oscilaţii, φ o constantă care depinde de fază, iar t este timpul, când se consideră această mişcare.

CAP. II

Compunerea mişcărilor vibrătoare

In cele precedente s'a admis că trajectoria mişcării vibrătoare este rectilinie, fiindcă mişcarea era rezultatul acţiunei a două forţe paralele. Dar, dacă considerăm că asupra moleculei lucrează două forţe perpendiculare, este evident că: mişcarea rezultantă nu va mai fi rectilinie, iar drumul descris de moleculă va fi curbiliniu. Aşa: Molecula M fiind adusă în M' în loc de a fi lăsată

să revină în M, ca în cazul precedent, să-i dăm o impulsiune în direcţiunea $M'x$; (Fig. 460), atunci ea va descrie un drum curbiliniu. Să căutăm care va fi ecvaţia mişcării, şi prin urmare forma drumului străbătut de către moleculă. Aşa dar molecula se găseşte sub influenţa a două forţe: una în direcţiunea Ox, şi alta în direcţiunea Oy. Ecvaţiele mişcărilor după fiecare din aceste direcţii sunt:

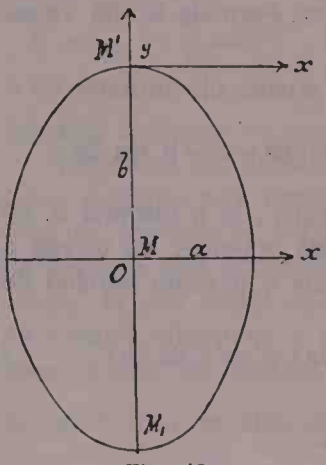


Fig. 460

$$x = a \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi) \text{ şi}$$

$$y = b \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi').$$

φ şi φ' fiind constantele caracteristice pentru cele două mişcări.

Pentru a găsi ecvaţia mişcării rezultante, trebue să considerăm aceste două ecvaţii împreună şi să facem să dispară t pentru aceasta desvoltăm cele două sinusuri şi avem:

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau} - a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau}$$

şi $$y = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\varphi'}{\tau} - b \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\varphi'}{\tau}$$

Să înmulţim prima ecvaţie cu: $b \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau}$ şi să scădem pe a doua din întâia. Vom ave:

$$bx \sin 2\pi \frac{\varphi'}{\tau} - ay \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau} = ab \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi). \quad (1)$$

Să înmulţim acum prima ecvaţie cu:

$b \cos 2\pi \frac{\varphi'}{\tau}$ şi pe a doua cu: $a \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau}$ şi să scădem pe a doua din întâia. Vom ave:

$$bx \cos 2\pi \frac{\varphi'}{\tau} - ay \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau} = ab \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) \quad . \quad (2)$$

Să rădicăm la patrat ecvaţiile (1) şi (2) şi să adunăm membru cu membru. Avem:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2 ab\, xy \cos \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = a^2 b^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) \quad . \quad (3)$$

Aceasta este ecvaţia unei elipse, a căreia formă de poziţie depinde de: a, b şi $(\varphi' - \varphi)$.

Fie k un număr pereche oarecare. Dacă:

$$\varphi' - \varphi = (2k + 1)\frac{\tau}{4}$$

Atunci: . . $\cos \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 0$ şi $\sin^2 \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 1$

Ecvaţia mişcării devine ;

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Ceia ce însamnă că molecula se mişcă pe o elipsă raportată la axele sale a şi b. Dacă admitem că amplitudinele a şi b sunt egale, adică axele elipsei sunt egale, atunci formula mişcării devine:

$$x^2 + y^2 = b^2$$

care este ecvaţia unui cerc; deci molecula vibrantă descrie circonferenţa unui cerc.

Dacă: $\varphi' - \varphi = 2k \frac{\tau}{4}$

atunci putem ave două cazuri:

1). K este nepăreche şi deci:

$$\sin^2 \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 0 \qquad \text{şi} \qquad \cos \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 1$$

şi formula mişcării devine:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + 2 a b x y = 0.$$

sau: $b x + a y = 0$

care reprezintă ecvaţia unei drepte.

2). K este pereche şi atunci:

$$\sin^2 \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 0 \text{ şi } \cos \frac{2\pi}{\tau}(\varphi' - \varphi) = 1$$

şi formula devine:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2 a b x y = 0.$$

Sau: $bx - ay = 0$.

care este ecvaţia unei alte drepte.

Deci: în aceste două cazuri trajectoria mişcării este rectilinie şi e reprezentată prin cele două diagonale ale dreptunghiului construit pe cele două axe: a şi b.

CAP. III.

Reprezentarea grafică a mişcării vibrătoare.

Mişcarea vibrătoare poate fi reprezentată prin o linie curbă continuă, care este o linie sinusoidală. Pentru a înţelege mai bine această reprezentare, să ne închipuim un şir de 8 molecule: Ao, A,... în linie dreaptă aparţinând unui mediu oarecare (Fig. 461). Să dăm primei molecule A_0 o impulsiune care să o ducă

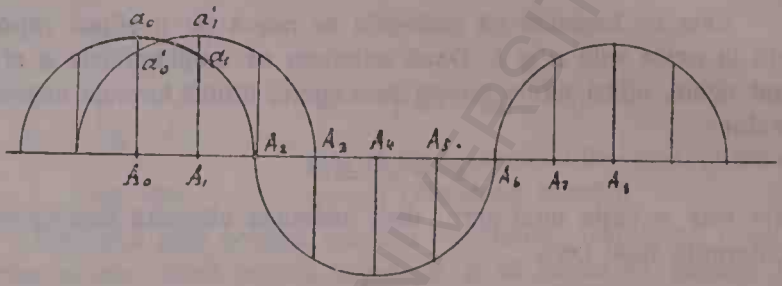


Fig. 461

în poziţiunea extremă a_0. Fiind că aceste molecule sunt în echilibru sub influenţa forţei de atracţiune care se exercită între ele, este evident că molecula A_0 va lua cu sine şi celelalte molecule în mişcarea ce ea execută; însă fiind că trebue un oarecare timp pentru ca această mişcare să ajungă în A,, este evident că: în momentul când A_0 ajunge la maximul de depărtare, molecula A, va fi ajuns numai în a, şi când ea va ajunge în poziţiunea extremă a'_1, molecula A_0 se va fi întors în a'_0, aşa că între moleculele A_0, A,..... va fi totdeauna o diferenţă de fază. Dacă aceste molecule sunt în întârziere una vis-a-vis de alta de $\frac{1}{8}$ de undulaţiune, este evident că: atunci când A_0 va fi în a'_0, molecula A_2 este în întârziere de $\frac{2}{8}\tau = \frac{\tau}{4}$ şi va pleca atunci din poziţiunea de echilibru, pe când A_4 va pleca numai după $\frac{4}{8}\tau = \frac{\tau}{2}$ şi A_8 după $\frac{8}{8}\tau = \tau$. Deci: între A_0 şi A_8 este o diferinţă de fază egală cu o perioadă complectă şi deci ele vor vibra sincronic. Însă noi am zis că: distanţa care separă două

puncte care vibrează sincronic, se numeşte: lungime de undă. In aceste condiţiuni putem să spunem că: două molecule separate prin o distanţă egală cu un număr păreche de $\frac{\lambda}{2}$, vor fi în concordanţă de fază şi vor vibra sincronic; pe când cele ce sunt separate prin o distanţă egală cu un număr nepăreche de $\frac{\lambda}{2}$ vor fi în discordanţă de fază.

Dacă V este viteza cu care mişcarea s'a propagat în timpul τ şi a parcurs lungimea de undă vom pute scrie;

$$V = \frac{\lambda}{\tau} \text{ de unde: } \lambda = V\tau.$$

După un timp t' mişcarea unei molecule care se găseşte a o distanţă x de la A_0 va fi reprezentată prin:

$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi - t')$$

Şi fiindcă: $t' = \frac{x}{V}$ vom ave

$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \varphi - \frac{x}{V}\right) = a \sin 2\pi\left(\frac{t-\varphi}{\tau} - \frac{x}{V\tau}\right)$$

şi înlocuind pe $V\tau$ prin valoarea sa λ, avem:

$$v = a \sin 2\pi\left(\frac{t-\varphi}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

CAP. IV

Fenomene de Interferenţă

Dintre fenomenele optice care ne interesează mai mult în Mineralogie, cele mai importante sunt: fenomenele de interferenţă, care provin din suprapunerea a mai multor mişcări vibrătoare. Vom considera dar cazul când, două sau mai multe mişcări vibrătoare, paralele şi de aceiaş perioadă, se suprapun.

Fie: $v_1 = a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi_1)$

$v_2 = a_2 \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi_2)$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

vibraţiunile considerate: ele vor ave ca rezultantă o vibraţiune unică:

$$V = v_1 + v_2 + \ldots = a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi_1) + a_2 \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \varphi_2) + \ldots$$

sau: $$V = \sin \frac{2\pi t}{\tau}\left(a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots\right) -$$

$$- \cos \frac{2\pi t}{\tau}\left(a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots\right)$$

Să punem: $a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots = A \cos 2\pi \frac{\Phi}{\tau}$

şi $a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots = A \sin 2\pi \frac{\Phi}{\tau}$

Dacă rădicăm la patrat aceste două egalităţi şi apoi le adunăm, vom ave:

$$A^2 = \left(a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots\right)^2 +$$

$$+ \left(a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots\right) \ldots\ldots (1)$$

Dacă dividem egalitatea a doua prin întâia avem:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\Phi}{\tau} = \frac{a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots}{a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \ldots} \ldots (2)$$

Putem scrie atunci pentru vibraţia rezultantă:

$$V = A\left(\sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\Phi}{\tau} - \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\Phi}{\tau}\right)$$

sau: $$V = A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - \Phi) \ldots\ldots\ldots (3)$$

Deci: vibraţiunea rezultantă va fi o vibraţiune simplă a căreia amplitudine A este dată prin formula (1), iar faza Φ, prin formula (2).

——·— Să reprezentăm acest rezultat prin o construcţie grafică, considerând mişcarea vibrătoare a proecţiei unui punct ce se mişcă pe circonferenţa unui cerc, a cărui rază este egală cu amplitudinea şi a cărui viteză unghiulară constantă este $\frac{2\pi}{\tau}$.

Fie două mişcări vibratoare produse de două puteri în di-

recţiunele OF şi OF', care se projectează pe axa Ox după OX, şi OX_2 (Fig. 462). Compunând pe OF=a, cu OF'=a_2 obţinem vibraţiunea rezultantă după OR=A care se projectează după OX. Unghiul cuprins între OF şi OF' rămâne constant şi egal cu: $\frac{2\pi}{\tau}(\varphi_1 - \varphi_2)$

Aşa dar: pe când mobilele F şi F' se mişcă pe circonferenţele cercurilor cu razele a, şi a_2, rezultanta mişcării lor e reprezentată prin mişcarea mobilului R pe circonferenţa cercului de raza A.

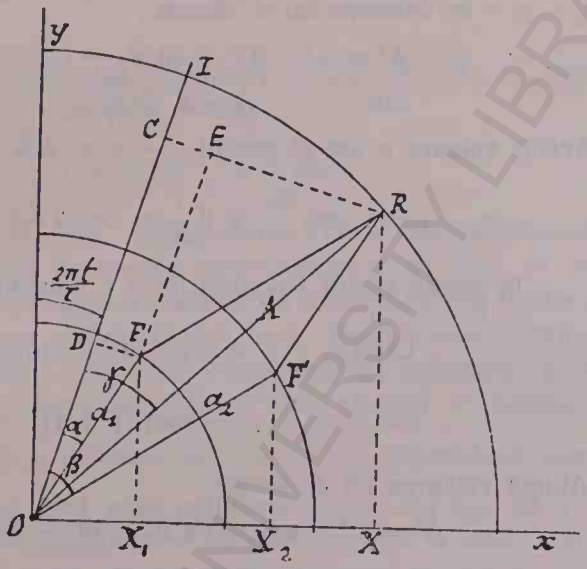


Fig. 462

Dacă considerăm o direcţiune OI care să facă cu Oy un unghiu $\frac{2\pi t}{\tau}$, atunci unghiurile ce fac această direcţie cu OF, OF' şi OR, reprezintă fazele mişcărilor componente şi a mişcării rezultante şi anume: $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}\varphi_1$, $\beta = \frac{2\pi}{\tau}\varphi_2$, $\gamma = \frac{2\pi}{\tau}\Phi$.

Să considerăm triunghiul OFR în care avem:

$$\overline{OR}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FR}^2 - 2\ OF.\ FR\ \cos\ OFR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Insă: $\cos\ OFR = -\cos\ FOF' = -\cos\ (DOF' - DOF)$

sau: $\cos\ OFR = -\cos\ (\beta - \alpha) = -\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}\varphi_2 - \frac{2\pi}{\tau}\varphi_1\right)$

sau: $\cos\ OFR = -\cos\frac{2\pi}{\tau}(\varphi_2 - \varphi_1)$

Atunci ecvaţia (1) devine:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\frac{2\pi}{\tau}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea lui A depinde de a, şi a_2 dar şi de diferinţa de fază $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Dacă a, şi a_2 au valori anumite, pentru $\varphi_2 = \varphi$, adecă: $\varphi_2 - \varphi_1 = o$, valoarea lui A devine:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

sau: $$A = a_1 + a_2$$

Aceiaş valoare o are şi pentru $\varphi_2 - \varphi_1 = 2K\frac{\tau}{2}$.

căci: $\cos \frac{2\pi}{\tau} 2K\frac{\tau}{2} = \cos 2K\pi = I.$

In aceste cazuri valoarea lui a e maximum.

Când $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\frac{\tau}{2}$, atunci:

$$\cos \frac{2\pi}{\tau}(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos(2k + 1)\pi = -1.$$

Atunci valoarea lui A devine:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2 \text{ sau;}$$

$$A = a_1 - a_2.$$

care reprezintă o valoare minimum; şi dacă: $a_1 = a_2$, atunci: $A = o$.

In acest caz mişcarea vibrătoare este complect distrusă.

Pentru a găsi faza mişcării rezultante, constatăm din figura precedentă că; dacă din R scoborâm o perpendiculară RC pe direcţia OI şi din F o perpendiculară FD pe OI şi alta FE pe RC, atunci avem:

$$CR = \sin\gamma \quad \text{şi} \quad OC = \cos\gamma$$

deci: $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{CR}{CO} = \frac{CE + ER}{CD + DO} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\tau}\varphi$$

Insă: $CE = DF = OF \sin a = a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau}\varphi_1$

De asemenea: $ER = a_2 \sin EFR = a_2 \sin DOF' = a_2 \sin\beta.$

său: $$ER = a_2 \sin \frac{2\pi}{\tau}\varphi_2$$

Apoi: $OD = OF \cos a = a_1 \cos\frac{2\pi}{\tau}\varphi_1$, şi

$$DC = EF = FR \cos\beta = a_2 \cos \frac{2\pi}{\tau}\varphi_2.$$

$$\text{Deci: } \operatorname{tg}\frac{2\pi}{\tau}\Phi = \frac{a_1 \sin\frac{2\pi}{\tau}\varphi_1 + a_2 \sin\frac{2\pi}{\tau}\varphi_2}{a_1 \cos\frac{2\pi}{\tau}\varphi_1 + a_2 \cos\frac{2\pi}{\tau}\varphi_2}.$$

Urmează dar că: mişcarea vibrătoare rezultantă este o nouă mişcare vibrătoare, dată prin ecvaţia:

$$V = A \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \Phi).$$

— In rezumat dară: suprapunerea a două raze luminoase de aceiaş natură, adică de lumină monocromatică, va ave ca rezultat: sau întărirea luminei până la un maximum, sau scăderea ei până la anularea complectă a luminei. Dacă întrebuinţăm însă două raze de lumină albă, care conţin aceleaş radiaţiuni şi au aceleaşi intensităţi respective, atunci, dacă pentru o radiaţiune determinată există o diferinţă de fază de $\frac{\tau}{2}$, va exista o interferenţă negativă şi deci, acea radiaţiune se va distruge. Bine înţeles că, celelalte radiaţiuni vor interfera pozitiv şi deci rezultanta lor nu va fi nulă. Lumina care va rezulta nu va fi albă, fiind că va lipsi radiaţiunea distrusă şi va fi colorată cu culoarea complimentară.

Fenomenele de interferenţă se pot realiza cu ajutorul a diferite aparate, care dau naştere aşa numitelor *Franje a lui Fresnel*, care consistă în o serie de bande alternativ luminoase şi obscure, care se repetă în mod simetric la dreapta şi la stânga unei bande centrale luminoasă. Formarea lor se explică, dacă facem să intervină fenomenele de interferenţă. Dacă din punctele L şi L' pleacă vibraţiuni luminoase de aceiaş periodă şi aceiaş amplitudine (Fig. 463) pe care le primim pe un ecran EE, atunci, dacă punctul A de pe ecran este aşa în cât LA = L'A, mişcările venite din L şi L', se vor ajuta, căci întârzierea între aceste mişcări este nulă; deci: în punctul A va fi interferenţă pozitivă, deci o bandă luminoasă. Dacă

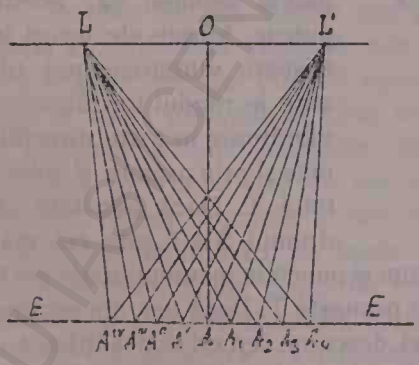


Fig. 463

însă considerăm un al doilea punct A, aşa ca să avem:

$$LA, - L'A, = \frac{\lambda}{2}$$

este uşor de văzut că, în punctul A, va fi interferenţă negativă, deci se va forma o bandă obscură; prin urmare vor urma la dreapta şi stânga lui A bande alternativ obscure şi luminoase. Este evident că, dacă operăm în lumină monocromatică, depărtarea franjelor una de alta variază cu valoarea lungimei de undă.

CAP. V

Principiul lui Huygens

Pentru a se pute explica mai bine fenomenele de dublă refracţie şi de polarizaţie să vedem în ce consistă principiul lui Huygens, relativ la propagarea undelor luminoase.

Mai întâi să vedem în ce consistă principiul: *celui mai scurt drum.*

Să considerăm punctul S în mişcare vibrătoare în faţa unui mediu diferit de acel în care el se găseşte, şi de care e separat prin suprafaţa MM'. (Fig. 164). Fie T un punct în mediul al doilea, care primeşte mişcarea vibrătoare de la S. Inainte de a ajunge în T, mişcarea trimisă de S, trebue să străbată suprafaţa MM'; şi fiindcă fiecare punct din suprafaţa MM' primeşte mişcarea din S, ne putem închipui că, aceste puncte, intrate ele însuşi în mişcare vibrătoare pot trimite la rândul lor mişcarea vibrătoare în toate direcţiunele şi prin urmare şi punctului T. Dacă admitem că drumul SAT este cel mai scurt între S şi T, punctul A precum şi punctele încunjurătoare pot fi considerate ca origina mişcării ce primeşte T. Dacă dar, din punctul A ca centru cu raze infinit de mici, descriem cercuri concentrice Aa, Ab, Ac... este evident că: mişcările trimise de *a*, *b*, *c*... vor pune mai mult timp pentru a ajunge în T, de cât mişcarea ce vine din A. Deci în T vor ajunge mişcări vibrătoare ce vor ave diferenţe defază, şi,

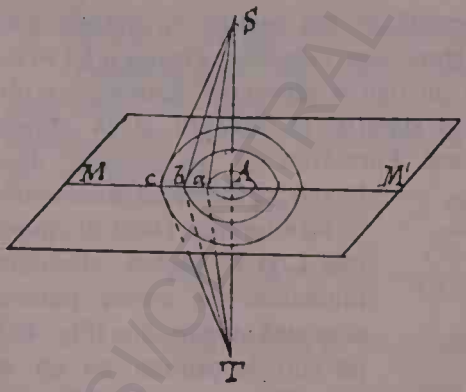


Fig. 464

dacă distanţele *Aa*, *ab bc*... sunt destul de mici, putem admite că aceste diferinţe de fază au ca valoare $\frac{\lambda}{2}$. Atunci, ne putem închipui în jurul punctului A, o serie de forme concentrice, compuse din serii de puncte, care trimit în T mişcări cu viteze: v_1, v_2, v_3... şi fiindcă aceste viteze sunt alternativ pozitive şi negative putem scrie însemnând cu V viteza mişcării ce primeşte T:

$$V = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots\ldots$$

Este evident că, terminii membrului al doilea scad în valoare şi, fiind că sunt alternativ pozitivi şi negativi, pentru ca V să aibă o valoare finită, trebue să neglijăm terminii de la un loc oare care, fără a micşura intensitatea mişcării pe care o primeşte T. Deci; efectul produs de punctele de pe suprafaţa M M' se reduce la acel produs de punctul A şi zonele încunjurătoare, sau astfeliu zis: dacă interpunem între A şi T un ecran având o deschidere care să lese liberă acţiunea lui A şi a zonelor încunjurătoare, punctul T va fi luminat ca şi când toată suprafaţa M M' ar fi descoperită: sau putem zice încă: dacă intercalăm un ecran care să împedece acţiunea lui A şi a zonelor încunjurătoare, punctul T nu va mai fi luminat, ceia ce însamnă că, celelalte zone mai îndepărtate nu-i trimet lumină. Şi, fiind că zonele descrise în jurul lui A sunt descrise cu raze de ordinul lui $\frac{\lambda}{2}$, suprafaţa activă în jurul lui A se poate reduce la acest punct, ceia ce însamnă că: punctul T. este luminat de o singură rază S A T, care reprezintă drumul cel mai scurt între S şi T.

Iată acum în ce consistă principiul lui Huygens.

Ipoteza în care ne-am pus până acum ne-a făcut să admitem că: molecula vibrantă, sub influenţa unei puteri, se mişcă în o singură direcţie. Fiindcă această mişcare trebue să se propage în toate direcţiile în jurul moleculei vibrante, vom admite că mişcarea acestei molecule consistă în dilatări şi contractări succesive, sau după cum se mai zice, dacă admitem o moleculă pulsantă, atunci mişcarea acestei molecule se va transmite moleculelor încunjurătoare în toate direcţiunile şi prin urmare va trebui să considerăm, după un timp anumit, în jurul moleculei vibrante, o serie de molecule care au aceiaş fază de vibraţiune, a căror loc geometric va constitui o suprafaţă, căreia se dă numele de: *suprafaţă de undă*. Şi fiind că mişcarea vibrătoare se propagă mai departe, putem considera fiecare punct a acestei prime suprafeţe, ca fiind centrul unei mişcări analoage ca acea

a primei molecule, şi prin urmare, după un alt timp, mişcarea plecată din fiecare din aceste puncte a ajuns până la o suprafaţă sferică, a căreia rază depinde de timpul considerat; în acest moment mişcarea vibrătoare produsă de prima moleculă va fi o suprafaţă unică, învălitoarea suprafeţelor produse de punctele suprafeţelor produse de punctele suprafeţei întâia. Urmează dar că, mişcarea vibrătoare se propagă sub formă de unde de formă deosebită, concentrice şi care se măresc continuu. Fiind că impulsiunea dată de prima moleculă se răspândeşte pe un număr din ce în ce mai mare de molecule, urmează că, cu cât ne depărtăm de origina mişcării, amplitudinea va scăde.

Este evident că, forma acestor suprafeţe de undă, va depinde de natura mediului în care se propagă mişcarea. Dacă mediul e *izotrop*, fiind că viteza mişcării e aceiaş în toate direcţiunele, *suprafaţa de undă va fi o sferă*. Pentru cazul unui mediu *anizotrop*, *suprafaţa de undă e un elipsoid* de formă variabilă.

— Considerarea suprafeţelor de undă complică explicarea diverselor fenomene optice, aşa că e nevoe a le înlocui cu unde plane, care ar fi undele curbe considerate la o mare distanţă de centrul lor de mişcare. In acest caz putem considera unda sferică, înlocuită prin o *undă plană*, tangentă în punctul unde suprafaţa de undă e atinsă de direcţiunea de propagare a mişcării, care prin urmare e perpendiculară pe unda plană.

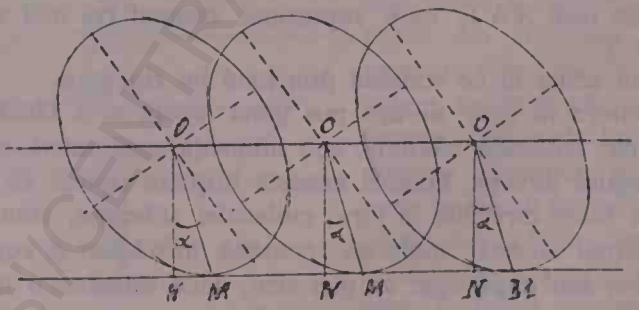


Fig. 465

In mediele anizotrope unde suprafaţa de undă nu mai este sferică, viteza de propagare a mişcării variază cu direcţiunea, prin urmare raza luminoasă nu se va mai confunda cu normala la unda plană

Şi într'un caz şi în cel-alt, unda plană se propagă paralel cu ea însăşi. In cazul mediului anizotrop (Fig. 465) viteza miş-

cării razei luminoase este reprezentată prin lungimea OM a dreptei ce uneşte centrul suprafeţei de undă cu punctul de contact al acestei suprafeţe cu planul tangent, pe când viteza de mişcare a undei plane e reprezentată prin distanţa cea mai mică ce separă două unde paralele consecutive, adică prin dreapta ON, căreia se dă numele de *viteză normală* şi a cărei valoare este

$$ON = OM \cos \alpha$$

α fiind variabil cu direcţia razei. E uşor de văzut că acest unghiu devine zero, când direcţia razei se confundă cu una din axele suprafeţei de undă.

Aşa dar, într'un mediu anizotrop, va trebui să considerăm două direcţii de propagare şi anume: direcţia razei luminoase şi direcţia normală la unda plană. Vom avea deci: *suprafaţa de undă* corespunzătoare punctelor M, atinse de raze după unitatea de timp, şi *suprafaţa vitezelor normale*, locul punctelor N unde ajung undele plane plecate din un centru comun, după unitatea de timp. (Fig. 466).

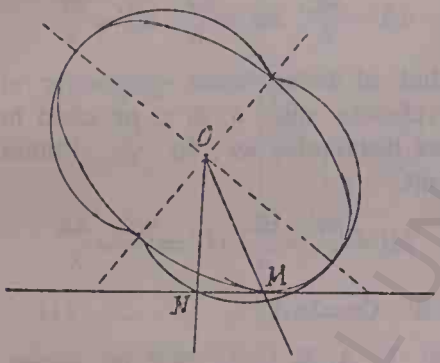


Fig. 466

Să aplicăm acum principiul lui Huygens la explicarea fenomenelor de refracţiune. (Fig. 467).

Fie SS' suprafaţă de separaţie între două medii izotrope deosebite, a căror viteze de propagare sunt V şi V'; să considerăm în primul mediu (aer) o undă plană incidentă UU', atingând suprafaţa de separare a celor două medii în punctul U.

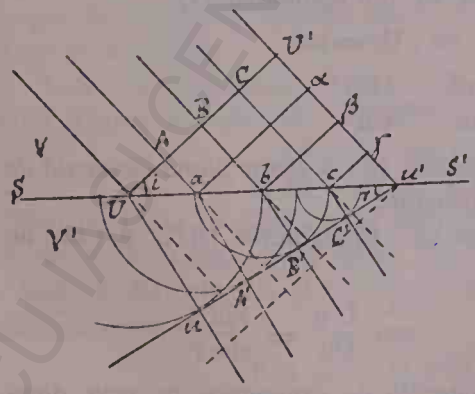


Fig. 467

După cele ce s'au văzut mai înainte, punctul U va transmite mişcarea ce a primit, cu o viteză V' în mediul al doilea, şi la finele unităţii

de timp, mişcarea va ajunge pe o sferă de rază:

$$V' = \frac{1}{\lambda} V$$

în un punct *u*. In acelaş timp punctele: A, B, C, vor fi percurs: mai întâi distanţele *Aa*, *Bb*, *Cc*, în primul mediu cu viteza V şi apoi distanţele aA', bB', cC', în al doilea mediu cu viteza V', pe când mişcarea plecată din punctul U' se propagă numai în mediul întâi şi ajunge abea în *u'* la suprafaţa de separaţie. Pentru a găsi poziţia punctelor atinse de mişcare în mediul al doilea, trebue să considerăm mişcările lui A, B, C, U' ajunse în *a*, *b*, *c*, *u'* pe undele plane $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$. Atunci, din punctele *a*, *b*, *c*, descriem sfere cu razele: $aA' = \frac{\alpha u'}{\lambda}$, $bB' = \frac{\beta u'}{\lambda}$, $cC' = \frac{\gamma u'}{\lambda}$.

Aceste sfere reprezintă în mediul al doilea locul geometric al punctelor atinse de mişcările plecate din: *a*, *b*, *c*, pe când în mediul întâi mişcarea a parcurs distanţele: αu, $\beta u'$, $\gamma u'$. Putem însă scrie că razele sferelor sunt:

$$Uu = V' = \frac{V}{\lambda}; \quad aA' = \frac{\alpha u'}{\lambda} = \frac{Cc}{\lambda}; \quad bB' = \frac{\beta u'}{\lambda} = \frac{Bb}{\lambda}; \quad cC' = \frac{\gamma u'}{\lambda} = \frac{Aa}{\lambda}$$

de unde: $Aa = \lambda cC'$; $Bb = \lambda bB'$; $Cc = \lambda aA'$ . . . . . (1)

Este evident că: dacă punctele V, A, B, C, U' sunt pe aceiaş dreaptă, punctele *u*, A', B', C', *u'*, vor fi de asemenea pe aceiaş dreaptă *uu'*, căci avem: $\frac{Aa}{Ua} = \frac{Bb}{Ub} = \frac{Cc}{Uc} = \frac{U'u'}{Uu}$.

Inlocuind valorile lui Aa, Bb, Cc din egalitatea (1)

şi fiind că: $Ua = cu'$, $Ub = bu$, $Uc = au'$

vom ave: $\frac{\lambda cC}{cu} = \frac{\lambda bB'}{bu'} = \frac{\lambda aA'}{au'} = \frac{\lambda Uu}{Uu'}$

Ceia ce se poate exprima zicând că: *o undă plană incidentă dă naştere la o undă plană refractată.*

Observăm de asemenea că: triunghiurile UU'u' şi Uuu' ne dau relaţiunile:

$$\frac{U'u'}{\sin i} = \frac{Uu}{\sin r} \qquad \text{sau} \quad \frac{U'u'}{Uu} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

şi fiind că U'u' şi Uu sunt vitezele de propagare în cele două medii considerate, vom ave în definitiv:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\text{Sin } i}{\text{Sin } r} = K.$$

Această construcție a fost simplificată și dată sub forma următoare: (Fig. 468):

Fie TT' suprafața de separație între cele două medii, și fie SI raza incidentă căreia corespunde unda plană I U; pentru a construi direcția razei refractate, din punctul I ca centru cu o rază proporțională cu V, construim o sferă, care reprezintă suprafața de undă corespunzătoare primului mediu. Dacă raza s'ar propaga ca în mediul întâi, ar atinge sfera în punctul A, unde unda plană corespondentă razei ar atinge sfera, și ar da cu suprafața TT' ca intersecție, o dreaptă care s'ar projecta în C. Dacă din punctul I ca centru cu o rază proporțională cu V' descriem o altă sferă, aceasta va reprezenta suprafața de undă în mediul al doilea. Pentru a ave direcția razei refractate, e de ajuns a duce din C tangenta CB la sfera a doua, tangentă care reprezintă unda plană refractată. Unind I cu B, dreapta IB reprezintă direcția razei refractate, care rămâne în planul de incidență.

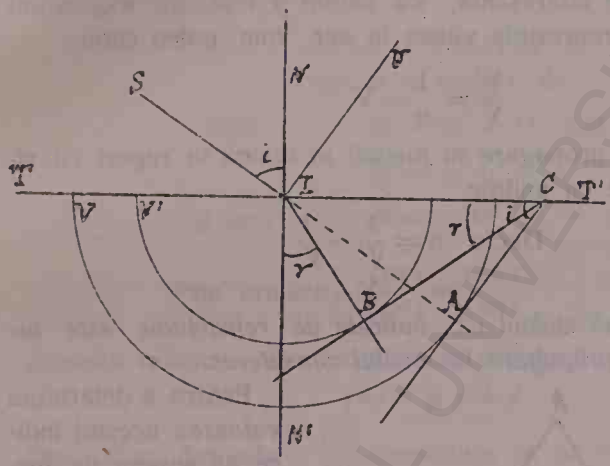


Fig 468

Cele două triunghiuri ICA și ICB, dreptunghice în A și B, având latura IC comună, ne dau:

$$IA = IC \sin ICA$$
$$\text{și } IB = IC \sin ICB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

și fiind că IA și IB sunt razele sferelor care reprezintă suprafețele de undă în cele două medii, ele reprezintă vitezele V și V'; și, fiind că dreptele CA și CD sunt normale pe IA și IB, este evident că vom avea:

$$ICA = i \quad \text{și} \quad ICB = r$$

Atunci egalitățile (1) devin:

$$V = IC \sin i$$
$$V' = IC \sin r$$

deci: $$\frac{V}{V'} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

şi fiind că V şi V' sunt constante, raportul lor va fi o constantă. Deci:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n$$

Constanta n se numeşte *Indice de refracţiune.* Această constantă fiind foarte interesantă, s'a căutat a i se da expresiuni diferite. Dacă V reprezintă viteza în aer, vom putea scrie:

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{n} = V,$$

V, fiind viteza de propagare în mediul al doilea în raport cu viteza în aer, luate cu unitate.

Deci: $$n = \frac{1}{\frac{V'}{V}} = \frac{1}{V,}$$

ceia ce se exprimă zicând că: *indicele de refracţiune este inversul vitezei de propagare în mediul considerat.*

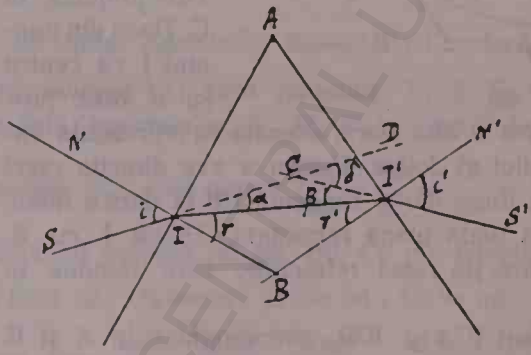


Fig. 469

Pentru a determina valoarea acestui indice ne servim de formulele prizmei (Fig. 469). Fie A unghiul prizmei şi SI raza incidentă, care străbate prizma după I I' şi apoi ia direcţia I' S', aşa că unghiul de deviaţie este: DCS'=δ.

Dacă n este indicele de refracţie avem:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{\sin i'}{\sin r'}$$

Insă în patrulaterul AIBI' avem: B=180°—A.

Iar în triunghiul IBI' avem:

$$B = 180 - (r + r') \quad \text{Deci: } A = r + r'.$$

De asemenea δ fiind exterior triunghiului C I I avem:

$$\delta = \alpha + \beta = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r')$$

sau înlocuind valoarea lui $r + r'$ prin A vom ave:

$$\hat{\varepsilon} = (i + i') - A$$

Însă, experienţa probează ca, pentru anumite valori a lui A şi *n*, deviaţia $\hat{\varepsilon}$ trece prin un minimum. Din formula precedentă deducem că acest minimum are loc pentru:

$$di + di' = 0$$

In adevăr: din formula, $\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{\sin i'}{\sin r'}$

deducem: $\sin i = n \sin r$ şi $\sin r' = n \sin r'$ şi prin urmare:

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \quad \text{şi}$$
$$\cos i \, di = n \cos r \, dr'$$

Deci: $dr + dr' = 0$ sau

$$dr = -dr'$$

şi deci: $di = -di'$

Prin urmare: $\frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'}$

Aceasta relaţiune nu e posibilă de cât dacă

$$i = i' \text{ şi } r = r'$$

Dacă luăm derivata: $\frac{d^2\hat{\varepsilon}}{di^2}$ constatăm că ea schimbă de semn;

— deci deviaţia

$$\hat{\varepsilon} = (i + i') - A$$

trece prin un minimum când: $i = i'$ şi $r = r'$.

Atunci formula prizmei se simplifică şi devine:

$$A = 2r \quad \text{deci } r = \frac{A}{2}$$

şi prin urmare: $\hat{\varepsilon} = 2i - A$.

şi deci: $i = \frac{\hat{\varepsilon} + A}{2}$

Prin urmare formula ce ne dă valoarea indicelui de refracţiune devine:

$$n = \frac{\text{Sin } \frac{A + \hat{\varepsilon}}{2}}{\text{Sin } \frac{A}{2}}$$

Deci: pentru a găsi pe *n* e de ajuns a cunoaşte pe A şi a determina pe $\hat{\varepsilon}$.

CAP. VI.

Dubla refracţie şi Polarizaţia

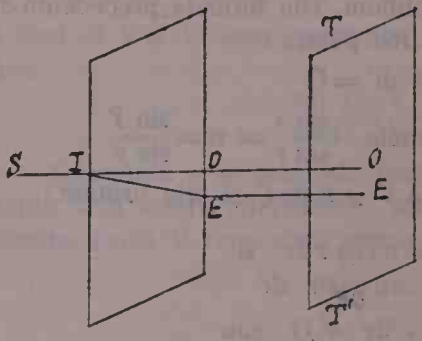


Fig. 470.

Se ştie că, dacă privim un obiect oarecare prin un Spat de Islanda, se văd două imagini a acelui obiect. De asemenea, dacă facem să cadă un fascicul paralel de lumină pe un Spat, vedem ieşind din cristal două fascicule, care dau pe un ecran două imagini a deschiderei prin care intră fascicolul de lumină (Fig. 470). Acest fenomen, care a fost descoperit la 1847 de către *Bartholin* şi studiat mai târziu de către *Huygens*, se numeşte: *dublă refracţiune.*

Dacă în această experienţă facem să se învârtească cristalul de Spat în jurul direcţiunei razei incidente, constatăm că, una din imagini rămâne nemişcată, pe când cea-l-altă se întoarnă în jurul celei întâi. Cea întâi rază urmează legile refracţiunei simple şi se numeşte *rază ordinară*; pe când cea-l-altă urmează după alte legi şi se numeşte *rază extraordinară,*

Huygens, care a studiat acest fenomen, a constatat că, pe lângă dedublarea razei incidente, lumina care străbate Spatul, capătă proprietăţi noui (Fig. 471). In adevar: dacă primim cele două raze ordinară şi extraordinară, eşite din un prim Spat pe un al doilea Spat, fiecare din ele se dublează şi se obţine în definitiv patru imagini, care în cazul cel mai general, nu mai au aceiaş intensitate luminoasă. Dacă înturnăm al doilea Spat, se constată că, pentru anumite poziţiuni, cele patru imagini se reduc la două şi chiar la una singură. Deci, lumina eşită din primul Spat nu este analoagă cu lumina naturală: ea a fost numită: *lumină polarizată.*

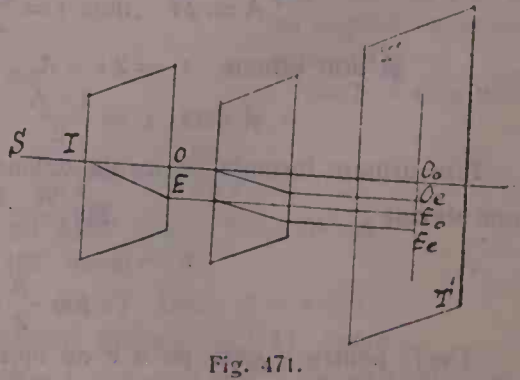


Fig. 471.

Aceste fenomene studiate de către Fresnel, l-au condus să admită mai multe hipoteze, pentru explicarea lor.

I. După Fresnel, lumina naturală este rezultatul vibraţiunei eterului, care se face într'un plan perpendicular pe direcţia de propagare, urmând trajectorii care pot fi: linii drepte, circonferenţe sau elipse, dispuse în azimuturi care schimbă în fiecare moment. (Fig. 472) Lumina care a trecut prin un Spat este polarizată. Pentru a defini ce este lumina polarizată, Fresnel admite că: în lumina care a trecut prin un Spat, vibraţiunele au loc tot într'un plan perpendicular pe direcţia de propagare, dar numai într'un singur azimut. (Fig. 473). Planul ce trece prin acest azimut şi direcţia de propagare se numeşte *plan de vibraţiune* iar planul ce trece prin direcţia de propagare şi e perpendicular pe planul de vibraţiune se numeşte: *plan de polarizaţie*. Aşa: *Ox* fiind direcţia de propagare, iar AB azimutul fix după care are loc vibraţiunea în planul M perpendicular pe Ox. planul de vibraţiune va fi VV, pe când planul PP' perpundicular pe VV' va fi planul de polarizaţie.

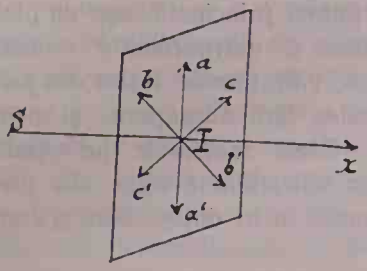


Fig. 472.

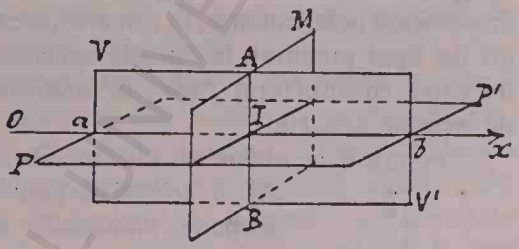


Fig. 473.

Când trajectoriile vibraţiunelor sunt linii drepte, polarizaţia se zice *rectilinie*, pe când pentru trajectorii circulare sau eliptice avem: polarizaţie *circulară* sau *eliptică*.

Pentru a obţine lumină polarizată se pot întrebuinţa mai multe metode; dar cele mai de multe ori se întrebuinţează romboedri de Spat de Islanda, şi relativ la ei vom căuta să dăm explicarea fenomenelor dublei refracţiuni. Se ştie că, într'un romboedru avem trei planuri, care trec prin axa principală şi muchile culminante şi care se numesc *secţiuni principale*. Dacă în experienţele citate, vom considera secţiunele principale a celor doi romboedri de Spat, se constată că: dacă secţiunele principale sunt paralele, avem două imagini şi când fac un unghiu oarecare, avem cele patru imagini. Pentru explicarea fenomenu-

lui conform definiţiunei date luminei polarizate, trebue să admitem că, secţiunea principală este: sau planul de vibraţiune sau planul de polarizaţie a unei raze. Când cristalii de Spat au secţiunele principale paralele, atunci primul Spat nu lasă să treacă de cât vibraţiunele paralele cu secţiunea principală, aşa că planurile de polarizaţie a razelor ordinare şi extraordinare coincidând cu acele ale Spatului al doilea, vibraţiunele ieşite din primul Spat vor putea trece prin al doilea fără alteraţiune şi prin urmare vom obţine două imagini, Când secţiunele principale formează între ele un unghiu, atunci vibraţiunele eşite din primul Spat vor încerca o descompunere în al doilea Spat şi vom obţine patru imagini.

— In diversele aparate ce servesc la producerea şi studiarea fenomenelor în lumină polarizată, nu avem nevoe a ave patru imagini, dar numai una singură. Intre aceste aparate avem: microscoapele polarizătoare, în construcţia cărora intră nişte romboedri de Spat preparaţi în condiţii speciale, care au fost imaginate de către constructorul *Nicol*, de unde numele de Nicoli, ce se dă acestor aparate.

Pentru a le obţine se tae un cristal de spat aşa că, urma AC a acestei secţiuni să facă cu AB, latura secţiunei principale, un unghiu BAC de cel puţin 80°; în practică BAC=90°. Se lipesc cele două jumătăţi cu balsam de Canada şi atunci, raza incindentă LS se descompune în doua raze; SE extraordinară şi SO ordinară, care ajung pe suprafaţa AC a balsamului de Canada.—Insă indicii de refracţiune ai spatului sunt:

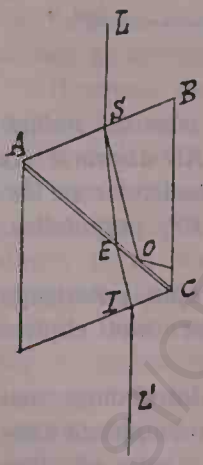


Fig. 474.

Pentru raza ordinară . . . 1.6585
„ „ extraordinară . . 1.4864

pe când indicele balsamului de Canada este: 1.5480.— Deci, raza ordinară având indicele superior celui al balsamului, va suferi reflexiunea totală, deci va fi dată la o parte, pe când raza extraordinară va trece prin spat: ea va fi polarizată paralel cu secţiunea principală a spatului.

Este evident că, dacă întrebuinţăm doi nicoli, raza extraordinară eşită din primul nicol, căzind pe al doilea, se descompune încă în două raze, din care, cea ordinară va suferi reflexiunea totală, pe când vibraţiunea razei extraordinare, va tre-

ce complect, sau va fi oprită, după cum secţiunile principale ale celor doi nicoli sunt paralele sau perpendiculare.

Cei doi nicoli astfel întrebuinţaţi se numesc: cel întâi *polarizor*, al doilea *analizor*. Când planurile secţiunelor principale ale polarizorului şi a analizorului sunt paralele, este evident că, raza incidentă căzută pe polarizor, va trece şi prin analizor, fiind că raza extraordinară ce iesă din polarizor este polarizată în planul secţiunei principale a acestui nicol şi deci şi în planul secţiunei principale a analizorului.—Dar dacă secţiunile principale ale nicolilor sunt perpendiculare, raza eşită din polarizor fiind polarizată în secţiunea principală a acestuia, are vibraţiunele sale perpendiculare cu secţiunea principală a analizorului, şi deci ea nu va putea merge mai departe. In fine dacă secţiunile principale a celor doi nicoli fac un unghiu oarecare, va trece numai o parte a vibraţiunei.

II.—A doua ipoteză admisă de Fresnel, este relativă la propagarea undelor în mediele cristalizate.

Pentru explicarea teoriei undulaţiunilor s'a admis că, dacă o moleculă de eter este deplasată din poziţiunea sa de echilibru, se naşte o forţă contrară, care tinde a aduce această moleculă în poziţiunea sa de echilibru: aceasta este o *forţă elastică*. Să presupunem că molecula s'a deplasat de o foarte mică cantitate *d*, atunci putem admite că, forţa elastică corespondentă F, este proporţională cu această deplasare şi atunci putem pune:

$$\frac{F}{d} = E$$

E fiind un coeficient constant, care se chiamă *coeficient de elasticitate*. Fresnel admite că, pentru vibraţiele luminoase putem scrie ca şi la acele sonore:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ceia ce se poate exprima zicând că: viteza de propagare a mişcării este proporţională cu rădăcina patrată din coeficientul de elasticitate şi invers proporţională cu rădăcina patrată din *masa specifică ρ a eterului*.

Atunci: dacă considerăm un mediu izotrop, trebue să admitem că, pentru rezon de simetrie direcţiunea forţei elastice este aceiaş ca a deplasării însă de sens contrar. Intr'un mediu anizotrop nu mai este acelaş lucru. Dar se poate demonstra că sunt cel puţin trei direcţiuni perpendiculare între ele, după care

forţa elastică are aceiaş direcţiune ca deplasarea. Se numesc *Axe de elasticitate* aceste trei direcţiuni. Să considerăm aceste trei axe de elasticitate: *Ox*, *Oy* şi *Oz* trecând prin un punct O şi să le luăm ca axe de coordonate (Fig. 475) Dacă presupunem că în O este o moleculă de eter, atunci, după cele ce am admis mai înainte, dacă deplasăm această moleculă după axa *Ox*, se naşte o forţă elastică X, dirijată după *Ox*, însă în senz contrar XO; pentru o deplasare x, putem să zicem că forţa elastică este proporţională cu această deplasare şi cu patratul coeficientului de elasticitate *a* şi să scriem: $X = -a^2x$.

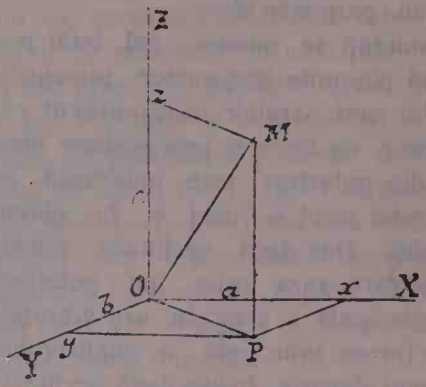


Fig. 475

De asemenea, după cele-l-alte axe de elasticitate vom ave:

$$Y = -b^2y$$
$$Z = -c^2z$$

Însă, dacă molecula O încearcă o deplasare oare care OM, atunci putem descompune această deplasare în trei alte deplasări după cele trei axe, având fiecare o forţă elastică corespondentă. Şi fiind că aceste deplasări sunt foarte mici, elasticităţile se suprapun şi putem admite că: *rezultanta celor trei forţe elastice după cele trei axe. este forţa elastică ce lucrează asupra lui M.*

Să facem acum aplicare la fenomenul dublei refracţiuni, adică la propagarea mişcării vibratoare într'un cristal oare care. (Fig. 476). Să admitem că MM' este suprafaţa acestui cristal, conţinând direcţiele Oz şi Oy a celor două axe de elasticitate şi fie SO direcţia unei raze normale feţei cristalului, adică a cărei suprafaţă de undă plană SS' este paralelă cu faţa cristalului. Putem admite mai întâi că, în unda SS' vibraţiunea are loc, sau dupa Sz, sau după Sy, şi în aceste

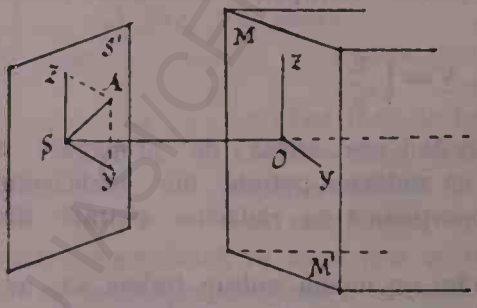


Fig. 476

cazuri mişcarea se poate propaga fără alteraţie cu o viteză proporţională cu coeficientul de elasticitate c^2 sau b^2. Dar, dacă mişcarea vibrătoare are loc după SA, intermediară între Sz şi Sy, atunci forţa elastică nefiind dirijată în senzul deplasării, tinde a schimba direcţia acestei deolasări, şi prin urmare unda nu se poate propaga fără alterare. In acest caz, în virtutea principiului mişcărilor mici şi a suprapunerei elasticităţilor în mişcările mici, putem admite că, unda corespondentă deplasării SA, este rezultatul suprapunerei a două unde a căror vibraţiuni sunt dirijate în direcţiuni vericare, însă a căror rezultantă este SA. Pentru cazul nostru unda poate fi considerată ca rezultatul suprapunerei a două unde, din care, una a cărei mişcare vibrătoare are loc în direcţia Sz şi ca mărime projecţia lui SA pe Sz, şi alta a cărei mişcare vibrătoare are loc după Sy şi are ca mărime projecţia lui SA pe Sy. Aceasta se poate exprima zicând că: *Unda incidentă a cărei vibraţiune are loc dupa SA, ajungând pe suprafaţa cristalului, se dedubleză în două unde polarizate în unghiu drept, care se propagă cu viteze neegale.*

Acesta este principiul **teoriei Dublei refracţiuni.**

Ne rămâne să arătăm acuma, cum se explică fenomenul dublei refracţiuni în corpurile cristalizate.

Fresnel admite că, fiecare cristal e simetric în raport cu trei axe rectaungulare, care sunt *Axele de elasticitate optică* (Fig. 477). Dacă luăm pe aceste axe lungimele: *a*, *b*, *c* proporţionale cu *Vg*, *Vm*, *Vp*, vitezele principale de propagare a razelor corespunzătoare undelor plane, putem construi un elipsoid, numit *Elipsoid -direct* a cărui ecvaţie este:

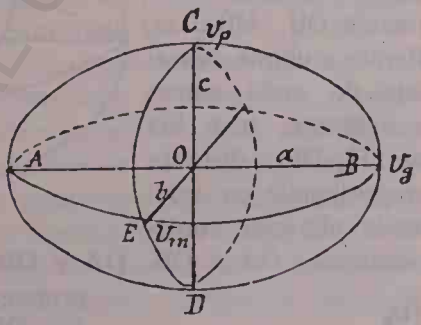


Fig. 477.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dacă raza luminoasă cade pe cristal, putem mişca cristalul până ce raza cade în centrul elipsoidului corespondent. Fie PO raza care cade astfeliu în centru elipsoidului; atunci unda plană normală pe raza PO, va determina în elipsoid o secţiune, care va fi o elipsă, a cărei axe sunt: OM şi ON. Atunci putem zice

că: dacă raza OP cade pe cristal, el va putea fi străbătut numai de două vibraţiuni, şi anume acele a căror trajectorii sunt

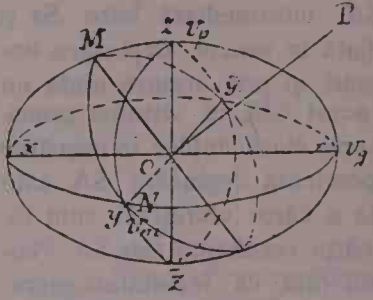


Fig. 478.

dirijate după OM şi ON, cu viteze egale cu aceste axe. (Fig. 478) Dacă vom considera o infinitate de raze de direcţiuni diferite şi construim punctele determinate prin vitezele mişcărilor lor în cele două direcţiuni admise, este evident că, locul geometric al acestor puncte va reprezenta *suprafaţa de undă* corespunzătoare. Şi fiind că axele de elasticitate optică sunt diferite, este evident că, după aceste axe vor fi viteze de mişcare diferite, reprezentate în formula elipsoidului prin parametrii *a, b, c,* care reprezintă vitezele principale.

Pentru a construi această suprafaţă de undă, considerăm elipsoidul şi direcţiunele de propagare a mişcării după OP, OR. (Fig, 479) cărora corespund în elipsoid secţiunele OB_1, OB_2..... Pentru a obţine suprafaţa de undă corespunzătoare, vom lua pe OP, OR.... distanţe proporţionale cu semi axele elipselor corespunzetoare OA şi OB_1, OA şi OB_2.... care reprezintă vitezele de propagare a celor două raze după OP, OR.... Locul geometric a punctelor astfeliu obţinute va fi suprafaţa de undă, a cărei intersecţie cu planul Vg Vp, este reprezentată prin figura alăturată. (Fig. 480).

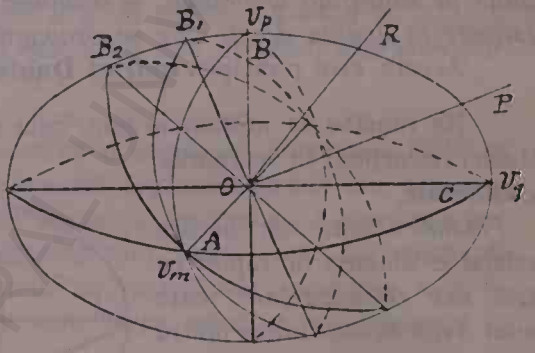


Fig. 479.

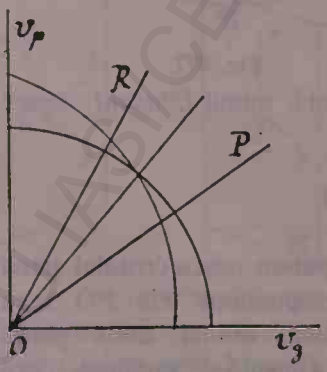


Fig. 480.

—Dacă considerăm acum undele vibrătoare, pentru a ave axele de elasticitate, va trebui să luăm *inversele vitezelor principale* care sunt:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$$

şi dacă construim pe aceste axe un elipsoid, el va fi reprezentat prin ecvaţia:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

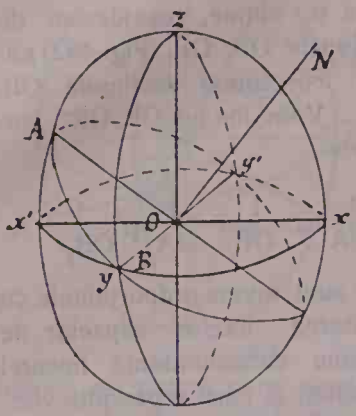


Fig. 481

Acest elipsoid se numeşte *elipsoid invers*. (Fig. 481) Acest elipsoid ne dă mijlocul de a găsi viteza de propagare a undelor plane în o direcţiune oarecare. In adevăr: după cele ce am spus relativ la elipsoidul direct, după o direcţiune ON se pot propaga numai două unde, a căror vibraţiuni sunt paralele cu axele OA şi OB a elipsei de secţiune corespunzătoare acestei direcţiuni. Dacă dar după această direcţiune se propagă numai două unde plane polarizate după OA şi OB, vitezele acestor unde vor fi invers proporţionale cu semi axele elipsei, adică cu $\frac{1}{OA}$ şi $\frac{1}{OB}$

Dacă direcţiunea mişcării este după Ox, aşa încât secţiunea normală coincide cu planul principal ZOY, cele două direcţiuni principale se confundă cu axele principale OZ şi OY a elipsoidului, şi cele două unde plane corespunzătoare se propagă cu viteze invers proporţionale cu aceste axe. In acest caz vibraţiunele au loc într'un plan de simetrie paralel cu două axe de simetrie a elipsoidului; deci raza luminoasă va coincide cu normala la undă. Deci: după axele principale razele luminoase fiind normale la unde se propagă cu aceleaşi viteze ca şi undele şi cantităţile a, b, c reprezintă vitezele de propagare a undelor sau a razelor după cele trei axe ale elipsoidului. Aceste trei axe sunt proporţionale cu cantităţile $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{c}$, care nu sunt alt ceva de cât inversele vitezelor de propagare a razelor sau a undelor sau, *indicii de refracţiune*. Se admite de a se însemna aceste cantităţi astfeliu:

$$\frac{1}{a} = n_p, \quad \frac{1}{b} = n_m, \quad \frac{1}{c} = n_g$$

Adică: indicii după axele: mică, mijlocie şi mare.

Pentru a construi suprafaţa de undă în cazul elipsoidului invers, ne închipuim că, din un punct oarecare ce vibrează, pleacă

mai multe unde, care după unitatea de timp ating diverse puncte a căror loc geometric este o suprafață, căreia se dă numele de: *Suprafața vitezelor normale.* Pentru a o obține, considerăm direcțiunile OP, OR, (Fig. 482) cărora corespund secțiunile OB, OB_2.... Vom lua pe OP, OR... lungimele

$$\frac{1}{OA} \text{ și } \frac{1}{OB_1}, \frac{1}{OA} \text{ și } \frac{1}{OB_2} \ldots$$

care sunt invers proporționale cu jumătatea axelor elipselor de secțiune corespondentă fiecărei direcțiuni și care reprezintă vitezele normale a undelor corespunzătoare. Pe fiecare direcțiune se vor lua deci două lungimi diferite: se va obține deci pentru locul geometric a punctelor astfeliu obținute, *o suprafață cu două nape.*

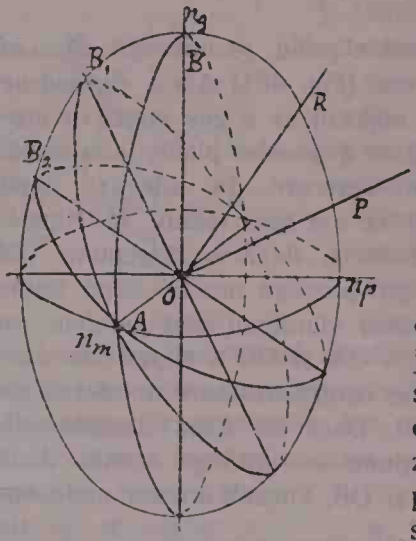


Fig. 482

Pentru a ne face o idee de natura acestei suprafețe vom considera o secțiune prin planul n_p n_g care va fi reprezintată prin figura 483.

Se știe că, în fiecare elipsoid o secțiune făcută prin un plan oarecare, este o elipsă a cărei axe variază în lungime după direcțiunea planului de secțiune. Se poate da planului și prin urmare și direcțiunei ON normală pe acest plan, o direcțiune așa că axele secțiunei să devină egale și deci secțiunea sa fie un cerc. (Fig. 484) In acest caz undele ce se propagă după ON vor ave viteze egale după toate direcțiunele considerate în a-

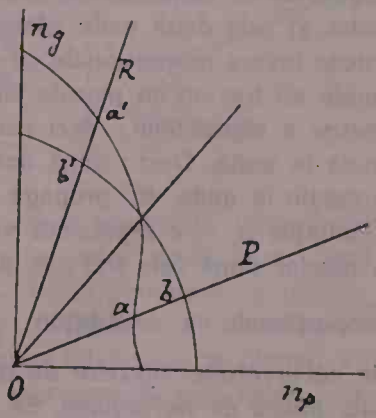


Fig. 483

ceste secţiuni, că, prin urmare, după această direcţiune, se va propaga o singură undă, şi deci cristalul este monorefringent. Secţiunea astfeliu determinată se numeşte *Secţiune ciclică* iar direcţiunei normale la o secţiune ciclică se dă numele de *Axă optică*. In cazul cel mai general, într'un elipsoid veri care există două secţiuni ciclice. Dacă considerăm însă un elipsoid de revoluţiune, nu putem avea decât o singură secţiune ciclică, normală pe axa de revoluţiune, şi prin urmare nu va exista de cât o singură axă optică, care se va confunda cu axa de revoluţiune.

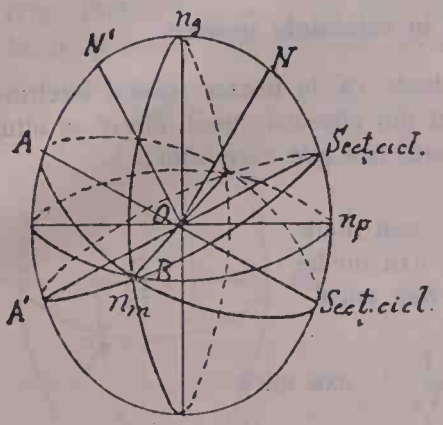


Fig. 481

Considerând simetria diverselor sisteme cristaline, constatăm că: sistemele *patratic*, *hexagonal* şi *romboedric* nu pot ave de cât o singură axă optică, şi de aceia, cristalele aparţinând acestor sisteme se numesc: *cristale uniaxe*; pe când cele l-alte cristale au două axe optice, şi de aceia se numesc: *cristale biaxe*.

Există o anumită relaţiune între simetria cristalină si cea optică. In adevăr: dacă considerăm un cristal având o singură axă de simetrie binară, dacă facem să se învârtă cristalul în jurul acestei axe, structura sa internă nu se va schimba pentru o învârtitură de 180°. Aşa: pentru un cristal monoclinic, dacă, axa binară coincide cu una din axele elipsoidului, cele-l-alte două axe se vor afla în planul de simetrie, într'o poziţie oare care. Dacă cristalul este ortorombie, axele elipsoidului coincid cu cele trei axe de simetrie binară a cristalului. Pe când, dacă considerăm un cristal tetragonal, romboedric sau hexagonal, atunci în planul perpendicular pe axa principală găsim mai mult decât două axe de simetrie binară şi fiindcă, fiecare trebue să coincidă cu o axă din secţiunea eliptică, aceasta având mai mult de cât două axe egale, va fi un cerc; deci elipsoidul e de revoluţiune în jurul axei principale. In fine, pentru cristalii cubici, elipsoidul se reduce la o sferă.

CAP. VII.

Dubla refracție în cristalele uniaxe.

S'a văzut în cele precedente că, în fiecare cristal birefringent trebue să considerăm cei doi elipsoizi: unul *direct* și altul *invers*, construiți fiecare pe cele trei axe care sunt:
Pentru elipsoidul direct:

V_g ... axa mare
V_m ... axa medie
V_p ... axa mică

Pentru elipsoidul invers:

$$n_p = \frac{1}{V_g} \cdots \text{axa mică}$$
$$n_m = \frac{1}{V_m} \cdots \text{axa medie}$$
$$n_g = \frac{1}{V_p} \cdots \text{axa mare}$$

După cum am văzut, la cristalele uniaxe elipsoidul este de revoluție în jurul axei principale, așa că are o singură secțiune ciclică.

Elipsoidul fiind de revoluțiune, putem ave următoarele cazuri:

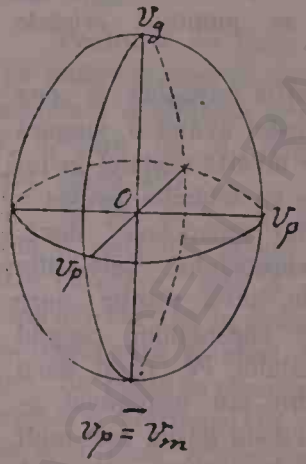


Fig. 485

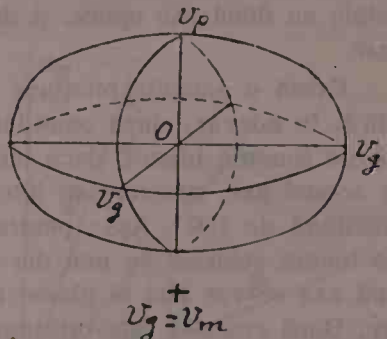


Fig. 486

Pentru elipsoidul *direct*:
1° $V_p = V_m$; deci elipsoidul va fi de revoluțiune în jurul lui V_p și deci va rezulta prin rotația elipsei în jurul axei mari V_g (Fig. 485) 2° $V_g = V_m$. Atunci elipsoidul va rezulta prin rotația unei elipse în jurul lui V_p și va fi turtit perpendicular pe axa mică. (Fig. 486).

Pentru elipsoidul *invers* putem ave iarăși două cazuri:

1^0 $n_p = n_m$ şi deci elipsoidul e de revoluţie în jurul lui n_g; (Fig. 487). 2^0 $n_g = n_m$ şi deci elipsoidul de revoluţie în jurul lui n_p şi turtit perpendicular pe axa mică (Fig. 488) Când elip-

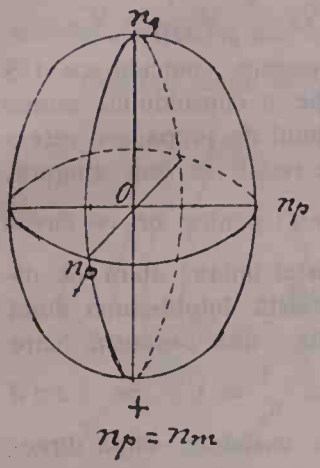


Fig. 487

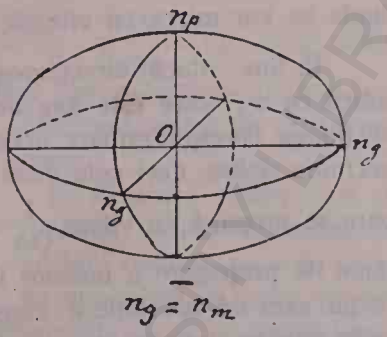


Fig. 488

soidul e de revoluţie în jurul lui v_g (direct) sau a lui n_p (invers), cristalul se zice *negativ*; pe când se numeşte *pozitiv* când elipsoidul e de revoluţie în jurul lui v_p (direct) sau n_g (invers).

I) Pentru a vede cum se propagă undele în cristalii uniaxi servindu-ne de suprafaţa vitezelor normale, să considerăm cazul unui cristal pozitiv şi în acesta elipsoidul invers, de revoluţie în jurul lui n_p. (Fig. 489). Dacă considerăm planul $n_g\, n_p$ în planul tabloului, secţiunea în elipsoid prin acest plan, precum şi prin orice plan ce trece prin n_g, este o elipsă şi se numeşte *secţiune principală*. Să considerăm în această secţiune principală direcţia de propagare OP, coincidând cu axa n_p; acestei direcţiuni de propagare corespunde o undă plană care dă cu elipsoidul o secţiune eliptică, ce are ca axe: $OA = n_p$ şi $OS = n_g$, După cele ce ştim, după aceste direcţiuni se propagă două unde a căror viteze de propagare sunt vitezele

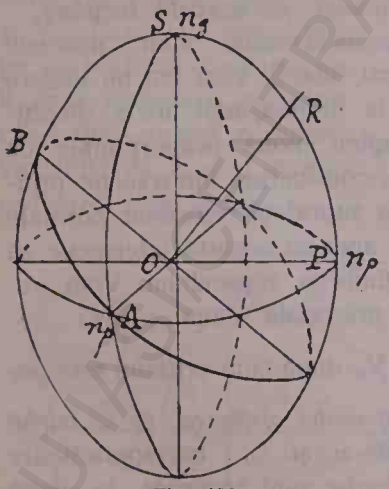


Fig. 489

principale: $V_g = \frac{1}{n_p}$ şi $V_p = \frac{1}{n_g}$ iar vibraţiunele sunt paralele cu

cele două axe a elipsei. Dacă considerăm tot în secţiunea principală o altă direcţiune de propagare OR, elipsa de secţiune corespundentă va avea ca axe OA şi OB, după care cele două unde se vor mişca cu vitezele: $\frac{1}{OA} = V_g$ $\frac{1}{n_p}$ şi $\frac{1}{OB} = V'_g$

In fine: dacă direcţiunea de propagare coincide cu OS adică cu n_g, care este axa de revoluţie a elipsoidului, atunci secţiunea corespunzătoare acestei direcţiuni de propagare este o *secţiune ciclică*, deci cele două unde se reduc la una singură, care se propagă cu viteza $\frac{1}{OA} = V_g$. Deci: pentru ori ce direcţiune de propagare a undelor într'un cristal uniax, afară de direcţia axei de revoluţie a elipsoidului, există întotdeauna două unde care se propagă cu viteze deosebite: una *ordinară*, care se propagă în totdeauna cu aceiaşi viteză $\frac{1}{n_p} = V_g$, pe când unda *extraordinară* se propagă cu viteze variabile, după direcţiune, cuprinse între: $\frac{1}{OA} = V_g$ şi $\frac{1}{OS} = V_p$.

Este uşor de văzut că, cele două unde fiind polarizate, *vibraţiunea ordinară având loc după OA, va fi totdeauna perpendiculară pe secţiunea principală*, pe când *vibraţiunea extraordinară va fi cuprinsă în această secţiune principală* şi deci: *unda ordinară va fi polarizată în secţiunea principală*, pe când *unda extraordinară e polarizată perpendicular pe această secţiune.*

Pentru a găsi *suprafaţa vitezelor normale* vom procede după cum s'a arătat în cazul general, adecă: vom lua pe fiecare direcţie de propagare, plecând de la origină, atât într'o direcţiune cât şi în direcţia contrară, lungimi invers proporţionale cu semi axele elipselor corespondente, considerate într'o secţie principală, ceia ce ne va da intersecţia suprafeţei vitezelor normale cu secţiunea principală; vom face apoi ca această intersecţie să se învârtă în jurul axei de revoluţiune a elipsoidului. Vom obţine ca intersecţie în secţiunea principală două curbe:

un cerc de rază $\frac{1}{n_g} = V_g$ sau $\frac{1}{n_g} = V_p$ după cum cristalul este pozitiv sau negativ, care corespunde *undei ordinare*; şi o *curbă ovală* inversă elipsei construită pe n_g şi n_p, corespunzătoare *undei extraordinare.* Aceste două curbe sunt tangente în două puncte corespunzătoare axei optice.

Dacă facem să se învârtă aceste două curbe în jurul axei

de revoluţiune, care este axa optică, se obţine pentru *suprafaţa vitezelor normale*: *o sferă* de rază $\frac{1}{n_p} = V_g$ şi *un ovaloid* de revoluţiune a cărui axe sunt: $\frac{1}{n_p} = Vg$ şi $\frac{1}{n_g} = V_p$.—(Fig, 490).

Când cristalul este pozitiv, sfera este exterioară ovaloidului; contrarul pentru un cristal negativ.

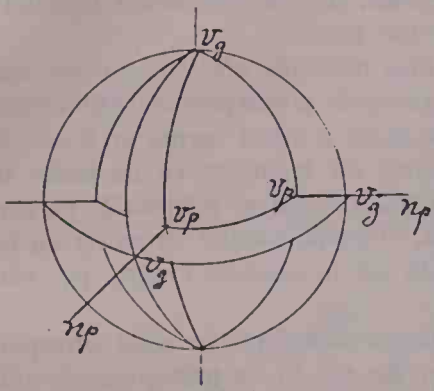


Fig. 490

II) Pentru a vedea cum se propagă razele luminoase în cristalii uniacşi, ne vom servi de *suprafaţa de undă*, şi vom procede ca şi la undele luminoase, însă vom lua în consideraţie elipsoidul direct.

Pentru un cristal pozitiv, elipsoidul direct are ca axă de revoluţie pe V_p. (Fig 491) In acest caz o direcţie oare care PO va da două raze, care se propagă cu viteze proporţionale cu axele OA şi OB a elipsei corespunzătoare; axa OA rămâne constantă pe când OB variază între V_g şi V_p. Raza OA care merge cu o viteză constantă va fi *raza ordinară*, pe când cea-l-altă, având o viteză variabilă va fi *raza extraordinară*. (Fig. 492).

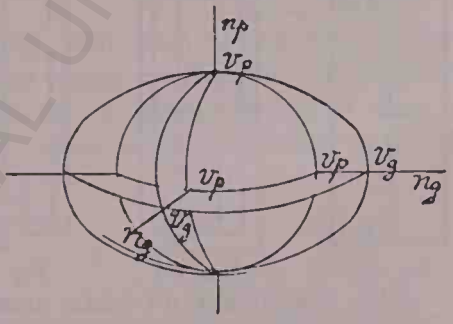


Fig 491

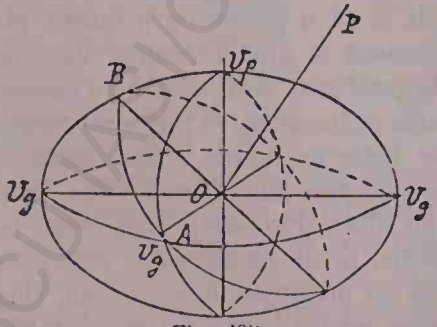


Fig. 492

Suprafaţa de undă se va obţine deci, luând pe fiecare direcţiune de propagare, vitezele date de cele două axe a elipselor corespondente. Ea va consista: din *o sferă* de rază V_g corespunzătoare şi: din *un elipsoid de revoluţiune* având ca axe pe V_g şi V_p, corespunzător razei extraor-

dinare. Cele două suprafeţe se ating în două puncte, prin care trece axa optică. La cristalele pozitive elipsoidul va fi interior sferei, căci raza ordinară se propagă mai repede de cât cea extraordinară. La cristalele negative va ave loc contrarul.

Ne rămâne de studiat cum se propagă razele refractate în diversele cazuri ce se pot prezenta, şi care este forma suprafeţei de undă, corespunzătoare acestor raze.

Ştim că, după Fresnel, raza ordinară are vibraţiunele sale perpendiculare pe secţiunea principală şi este polarizată în această secţiune principală, refractându-se ca şi când corpul ar fi izotrop, adică rămâne totdeauna în planul de incidenţă cu un indice de refracţiune constant. — Raza extraordinară e polarizată perpendicular pe secţiunea principală, vibrează paralel cu ea, şi nu rămâne în planul de incidenţă de cât în anumite cazuri, pe care le vom studia mai pe urmă.

— Pentru a determina forma suprafeţei de undă corespunzătoare celor două raze, observăm că, în ce priveşte raza ordinară, cristalul se comportă ca o substanţă izotropă şi deci suprafaţa de undă corespunzătoare este o sferă. Ne rămâne de determinat în mod experimental, care e forma undei corespunzătoare razei extraordinare.

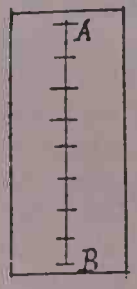


Fig. 493

Fig. 494

Fig. 495

Să considerăm un cristal uniax şi să tăem din acest cristal o lamă cu feţe paralele şi care să conţină direcţiunea axei.

Să ducem pe o foaie de hârtie o linie divizată într'un număr oare care de diviziuni egale şi să o privim cu o lunetă dispusă aşa ca, dreapta să se găsească în planul vertical determinat de lunetă în mişcarea sa în jurul axei verticale care o susţine, aşa ca linia să coincidă totdeauna cu încrucişarea firelor reticulului. (Fig. 493) Să aşezăm atunci pe foaia de hârtie, lama tăetă în cristalul birefringent. Privind atunci prin lunetă vom vede două imagini a liniei una alăturea cu alta; (Fig. 494) dacă însă înturnăm cristalul pe foaia de hârtie, la un moment dat cele două imagini se suprapun, aşa că ele se prelungesc una pe alta. (Fig. 495) Pentru a găsi încă o poziţie pentru care acest lucru să aibă

loc, va trebui să înturnăm cristalul de 90° şi atunci direcţia axei va fi perpendiculară pe linie. Aceasta însamnă că, în aceste două cazuri, raza care iese din lunetă şi cade pe lama birefringentă se separă în două raze, însă raza extraordinară rămâne în planul de incidenţă. Vom considera cazul în care, axa cristalului este în planul de incidenţă, căci aceasta ne va permite de a determina forma suprafeţei de undă corespunzătoare razei extraordinare.— Pentru aceasta să considerăm planul figurei ca plan de incidenţă şi fiind că axa cristalului se găseşte în planul de separaţie a aerului de cristal şi deci şi în planul de incidenţă, direcţia sa se poate confunda cu MM' (Fig. 496). Dacă SI este raza incidentă, vom construi mai întâi după regula lui Huygens, cercul BOB', care este secţiunea determinată de planul figurei în sfera ce reprezintă suprafaţa de undă corespunzetoare aerului; şi o secţiune AEA' în suprafaţa de undă corespunzătoare razei extraordinare, a cărei formă voim să determinăm. Prin construcţie determinăm numai direcţia IE a razei extraordinare. In experienţa noastră, privind prin lunetă vedem cele două imagini suprapuse şi liniile pe prelungirea una alteia; dar mai observăm că la încrucişarea firelor reticulului, coincid două diviziuni diferite de pe cele două imagini: una BI care corespunde razei ordinare şi alta AI, razei extraordinare, care ies din cristal după aceiaşi direcţiune IS. (Fig. 497) Fie *m* diferinţa între numerele diviziunilor care coincid. Atunci noi putem zi

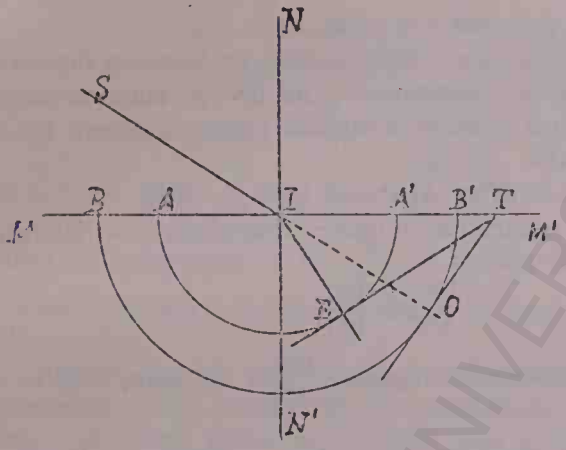


Fig. 496

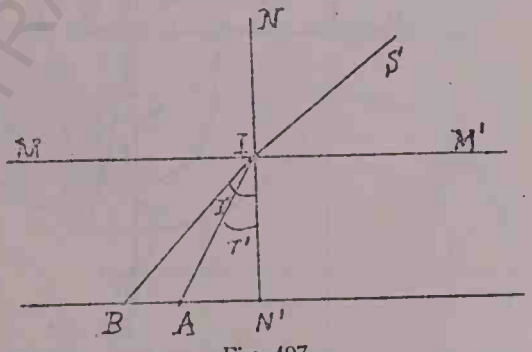


Fig. 497

dacă raza SI cade pe cristal, ea dă două raze IA şi IB, care vin la nişte diviziuni ce diferă de *m*. Dacă însemnăm cu *e* grosimea IN′ a lamelei, putem determina valoarea lui BN′ prin relaţia:

$$BN' = IN' \operatorname{tg} BIN' = e \operatorname{tg} r \ . \ . \ , \ (1)$$

r fiind cunoscut ca unghiul de refracţie a razei ordinare dat prin relaţia:

$$\sin r = n \sin i$$

n fiind indicele ordinar, iar *i* fiind unghiul ce face axa lunetei cu verticala. — Cunoscând dar valoarea lui BN′ şi numărul corespunzător lui B, putem deduce diviziunea corespunzătoare lui N′. Atunci triunghiul AIN′ ne dă:

$$AN' = IN' \operatorname{tg} AIN' = e \operatorname{tg} r', \ . \ . \ . \ (2)$$

r′ fiind unghiul de refracţiune a razei extraordinare. — Divizând egalităţile (1) si (2) avem:

$$\frac{BN'}{AN'} = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r'}$$

Insă, experienţa probează că raportul $\frac{BN'}{AN'}$ e constant, ceia ce arată că:

Secţiunea în unda extraordinară e o elipsă. — Pentru a

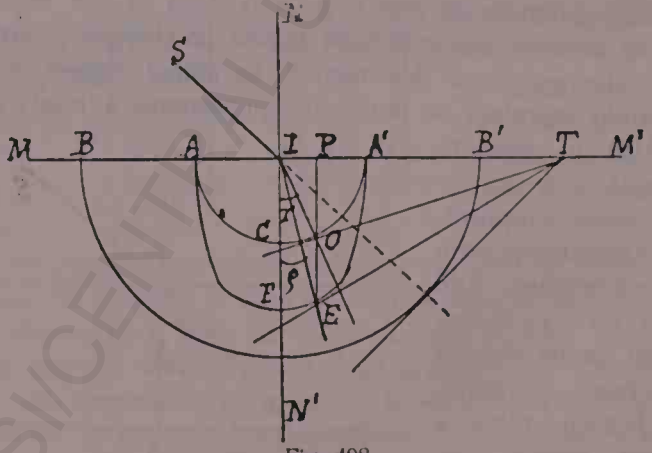


Fig. 498

construi dar direcţia razei extraordinare, vom relua construcţia lui Huygens. şi pe AA′ ca axa mică vom construi o elipsă a cărei axă mare să fie determinată prin raportul: $\frac{IC}{IF} = K$, K fiind dat prin raportul: $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r'}$ (Fig. 498) Având dar direcţia IO a razei ordinare, ducem OP normală la MM′ şi o prelungim până

ce întâlneşte elipsa în punctul E. — Atunci IE reprezintă raza extraordinară corespunzetoare razei incidente SI. In adevăr, elipsa ne dă:

$$\frac{PE}{PO} = \frac{IC}{IF} = K$$

Triunghiul IPO ne dă: $IP = PO \operatorname{tg} r \ldots (1)$

Iar triunghiul IPE ne dă:

$$IP - PE \operatorname{tg} PEI = PE \operatorname{tg} EIC = PE \operatorname{tg} \rho \ldots (2)$$

De aici urmează: $PO \operatorname{tg} r = PE \operatorname{tg} \rho$ sau

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \rho} = \frac{PE}{PO}$$

Insă noi am găsit: $\frac{PE}{PO} = K$ deci: $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \rho} = K$

Şi fiind că experienţa ne dă: $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \rho} = K$ Urmează că: $r = \rho$ pentru valori mai mlci de cât 90°. Deci: IE reprezintă raza extraordinară.

Rezultă dar că, suprafaţa de undă corespunzetoare razei extraordinare este un elipsoid de revoluţiune în jurul axei principale. Cele două suprafeţe de undă sunt concentrice, însă viteza lor de propagare relativă depinde de viteza de propagare a celor două raze corespondente. Aşa: când viteza de propagare a razei extraordinare e mai mare, elipsoidul este *turtit* după axa de revoluţie şi este exterior sferei. (Pig. 499) In acest caz cristalul este *negativ*. Pentru cazul contrar elipsoidul este *lungit* după axa de revoluţie, este în interiorul sferei şi cristalul este *pozitiv* (Fig. 500) Fiindcă viteza vibraţiunei este aceiaş după axa AA', rezultă că, cele două suprafeţe tae această axă în aceleaş puncte, unde au axa comună,

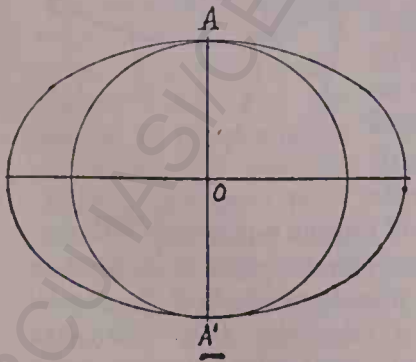


Fig. 499

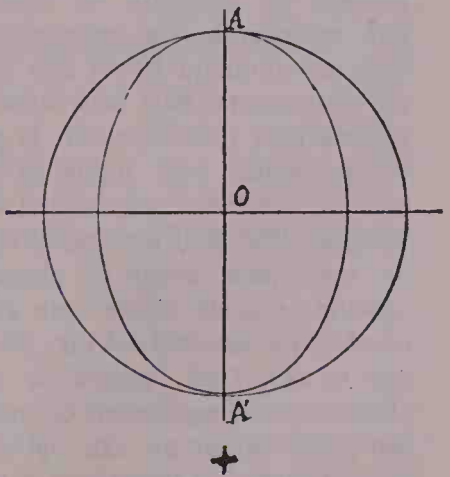


Fig. 500

deci ele sunt tangente interioare una altuia în punctele A şi A'.

— Pentru a construi direcţia razei ordinare şi extraordinare, să considerăm suprafaţa BB' de separare a celor două medii: aerul şi corpul birefringent, şi SI direcţia razei incidente (Fig. 501). Să construim mai întâi cercul corespunzător mediului exterior (aerul) şi prin punctul P unde raza SI prelungită atinge acest cerc, să ducem planul tangent, care ne dă cu suprafaţa de separaţie o dreaptă de intersecţie a cărei urmă este T. Construim apoi o sferă O cu o rază corespunzetoare vitezei razei ordinare, şi planul tangent TR care ne da raza ordinară IR. Apoi construim elipsa corespunzătoare razei extraordinare având pe Ia ca axă mică şi I*b* ca axă mare corespunzătoare vitezei razei extraordinare. In cazul acesta ducând planul tangent TQ, raza extraordinară va fi IQ.

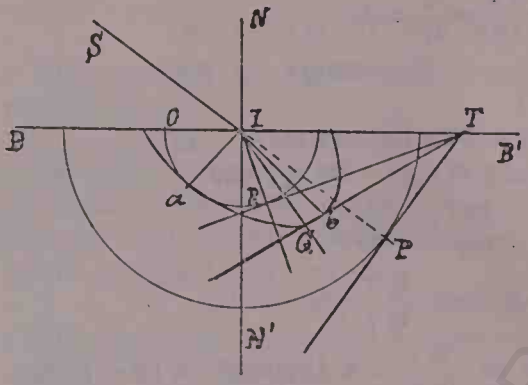


Fig. 501

Poziţia razei extraordinare este variabilă şi depinde de orientarea feţei de incidenţă în raport cu axa cristalului şi cu orientarea planului de incidenţă în raport cu faţă refringentă. De ordinar această rază extraordinară IQ nu este în planul de incidenţă. Sunt însă cazuri când această rază poate rămâne în planul de incidenţă, care trebue să fie un plan de simetrie a elipsoidului de revoluţiune (Fig. 502) Insă într'un elipsoid de revoluţiune avem ca planuri de simetrie pe acele ce trec prin axa de revoluţie precum sunt ABA'B', ACA'C' precum şi planul BCB'C' normal la axă. Deci: pentru ca raza extraordinară să rămână în planul de incidenţă trebue ca acel plan de incidenţă să fie paralel sau perpendicular pe axa optică a cristalului. (Fig. 503). Aşa raza SI căzând pe faţa *a b c d* a unui cristal uniax, şi urma pe a-

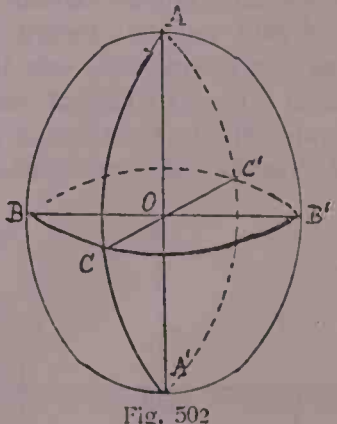


Fig. 502

ceastă faţă a axei AA', fiind *nm*, este evident că raza extraordinară rămâne în planul de incidenţă dacă acest plan este: SI mn sau SI m 'n'.

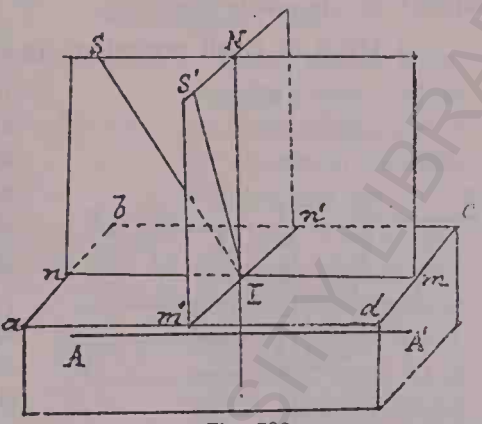


Fig. 503

— Să aplicăm construcţia lui Huygens pentru aceste două cazuri.

I. *Planul de incidenţă e paralel cu axa optică a cristalului.* In acest caz construcţia este identică cu acea a cazului general pe care l-am examinat mai înainte (Fig. 504). Raza extraordinară rămâne în planul de incidenţă, însă indicele său de refracţiune variază cu unghiul de incidenţă. De aceia vom ave de considerat mai multe cazuri.

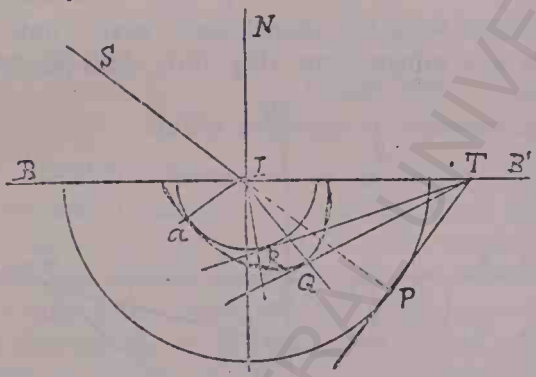


Fig. 504

a) Raza incidentă este normală la faţă deci se confundă cu normala la faţă. In acest caz planul tangent la sfera corespunzătoare mediului exterior este paralel cu faţa şi prin urmare atinge această faţă la infinit. (Fig. 505) Considerând sfera O şi elipsoidul E, planul tangent ne dă: pentru sfera O punctul de contact R pe raza SI prelungită sau pe normala NN', deci raza ordinară nu e deviată. Pe când punctul de contact Q pe elipsoid

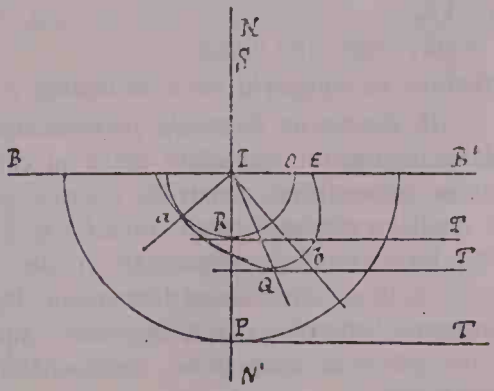


Fig. 505

are o poziţie oarecare; deci raza extraordinară e deviată dar rămâne în planul de incidenţă.

b) Dacă în cazul precedent axa mică Ia este paralelă cu faţa, atunci punctele R şi Q se găsesc pe prelungirea lui SI şi prin urmare nici o rază nu e deviată, dar ele se propagă cu viteze deosebite (Fig. 506).

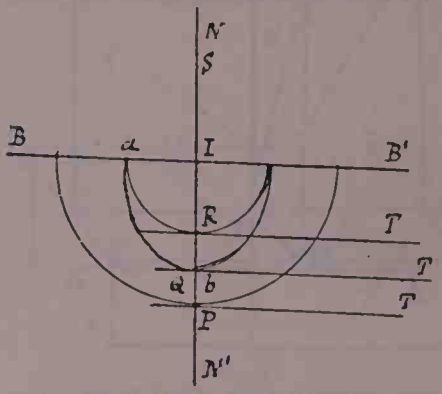


Fig. 506

c) Dacă axa mică a elipsei are o poziţie oarecare în planul de incidenţă şi raza incidentă e dirijată aşa ca raza ordinară să se propage paralel cu axa IA, atunci planul tangent atinge sfera corespunzătoare razei ordinare în punctul A unde axa atinge sfera. (Fig. 507). Insă punctul A este punctul de contact al sferei cu elipsoidul, şi planul tangent va atinge elipsoidul în acelaş punct. Prin urmare, raza extraordinară urmează direcţia razei ordinare şi deci nu e de cât o singură rază refractată după axa IA şi deci o singură undă plană TA.

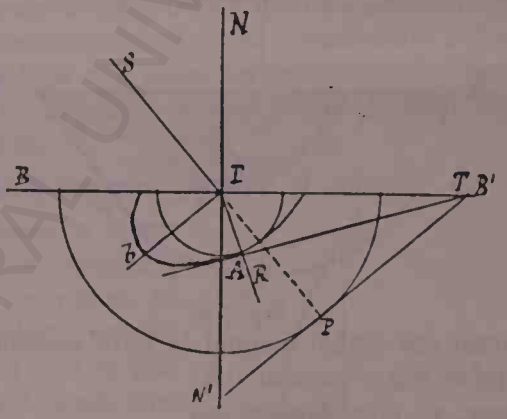


Fig. 507

Deci: *după axa optică cristalul se comportă ca o substanţă monorefringentă.*

II. *Planul de incidenţă perpendicular pe axă.* In acest caz planul figurei tae elipsoidul după un cerc, aşa că vom ave trei cercuri concentrice, construite cu raze proporţionale cu vitezele: în mediul exterior, în raza ordinară şi în raza extraordinară. (Fig. 508). Raza cercului corespunzător undei extraordinare este raza ecvatorială a elipsoidului de revoluţie. Insă, fiindcă aceste raze sunt constante, vitezele corespunzătoare sunt şi ele constante, şi atunci indicii de refracţiune corespunzători sunt şi ei constanţi căci avem:

$$n_0 = \frac{\text{Sin } i}{\text{Sin } r_0} = \frac{V}{V_0} \text{ şi } \qquad n_e = \frac{\text{Sin } i}{\text{Sin } r_e} = \frac{V}{V_e}$$

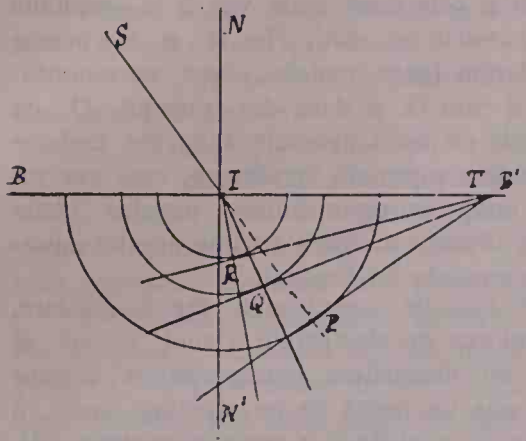


Fig. 508

Deci: pentru a determina indicii ordinar şi extraordinar, trebue să operăm în condiţiile arătate mai sus.

Dacă raza incidentă devine normală planului de separaţie a celor două medii, cele două raze IQ şi IR se propagă după aceiaş dreaptă, care este prelungirea razei incidente, însă cu viteze diferite.

CAP. VIII

Dubla refracţie în cristalele biaxe

Cristalele biaxe aparţin sistemelor: ortorombic, monoclinic şi triclinic. In aceste cristale există două direcţiuni după care lumina se propagă ca într'un mediu izotrop. Pentru cristalii acestor trei sisteme există o analogie: Forma suprafeţei de undă e aceiaş dacă considerăm o lumină de periodă determinată, iar ca diferinţă avem că: orientarea acestei suprafeţe de undă variază cu valoarea lungimei de undulaţiune a luminei întrebuinţate, în raport cu simetria cristalului considerat.

— Pentru a determina forma generală a suprafeţei de undă să considerăm o undă plană AA', a cărei direcţiune de propagare este OX (Fig. 509). După teoria generală a dublei refracţiuni, la origina mişcării vibrătoare putem considera această undă ca rezultatul suprapunerei a două unde a căror direcţiuni de vibraţiune sunt dreptunghiulare. Să căutăm a determina poziţiunea lor după un timp t. Ştim însă că, coe-

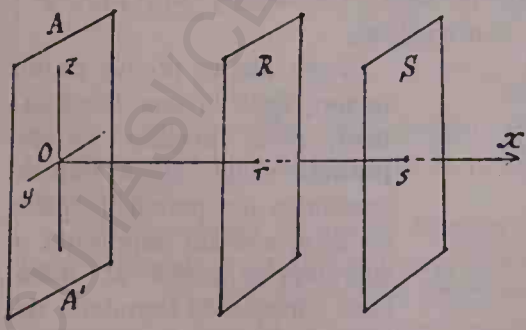


Fig. 509

ficientul de elasticitate nu este acelaş pentru cele două unde şi că vitezele de propagare nu sunt aceleaş. Deci după timpul t va fi o diferinţă de drum şi cele două unde vor fi în poziţiuni diferite, rămânând însă paralele cu AA'. Fie R' şi S' aceste două unde. Dacă considerăm toate undele plane corespunzătoare direcţiunilor trecând prin O, şi dacă din punctul O ca centru descriem suprafeţele de undă generale, tangente undelor plane R' şi S', vom obţine suprafeţe învălitoare, care vor reprezenta suprafeţele de undă corespunzătoare undelor plane R' şi S', după timpul t. Pentru a stabili ecvaţia acestei suprafeţe de undă, vom urma metoda lui Fresnel.

Fie Ox, Oy, Oz trei axe de coordonate dreptunghiulare, corespunzătoare celor trei axe de elasticitate a unui cristal, şi fie a^2, b^2, c^2 conficienţii de elasticitate corespunzători acestor axe (Fig. 510). Dacă M este un punct de pe suprafaţa undei, a cărui coordonate sunt: x, y, z, şi dacă r este raza vectorie OM, putem scrie: $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Iar ecvaţia generală a suprafeţei din care face parte M, se poate scrie:

$$\frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

Putem da acestei ecvaţii altă formă: să alungăm mai întâi numitorii: vom ave:

$$(r^2 - b^2)(r^2 - c^2)a^2x^2 + (r^2 - a^2)(r^2 - c^2)b^2y^2 + (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)c^2z^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dacă facem operaţiele obţinem o ecvaţie de gradul al 6-lea care se poate scrie:

$$r^4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2[(b^2 + c^2)a^2x^2 + (c^2 + a^2)b^2y^2 + (a^2 + b^2)c^2z^2] + a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Şi considerând ecvaţia (1) putem scrie:

$$r^2[r^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - (b^2 + c^2)a^2x^2 + (c^2 + a^2)b^2y^2 + (a^2 + b^2)c^2z^2 + a^2b^2c^2] = 0.$$

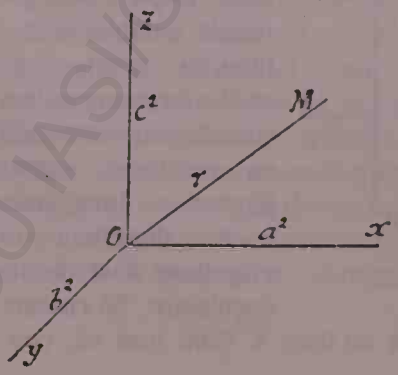


Fig. 510

Avem aici un produs de doi factori, egal cu zero. Dacă punem: $r = 0$, aceasta nu reprezintă nimic. Dacă punem cantitatea din parentez egală cu zero, aceasta reprezintă o suprafaţă de gradul al 4-lea care corespunde suprafeţei de undă căutată.

Pentru a ne face o idee de forma acestei suprafeţe, să

căutăm a determina care este forma secţiunilor obţinute prin planurile de elasticitate, în această suprafaţă.

Pentru a ave secţiunea prin planul *xy*, trebue să facem $z=0$. Atunci ecvaţia (2) devine:

$$(r^2-c^2)[(r^2-b^2)a^2x^2+(r^2-a^2)b^2y^2]=0$$

care se mai poate scrie:

$$(r^2-c^2)[r^2(a^2x^2+b^2y^2)-a^2b^2(x^2+y^2)]=0$$

şi fiind că: $r^2=x^2+y^2+z^2$ şi $z^2=0$ deci

$$r^2=x^2+y^2$$

putem scrie: $r^2(r^2-c^2)(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)=0$

care reprezintă secţiunea prin planul xy.

In această secţiune dacă facem:

$r^2=0$, aceasta reprezintă un cerc redus la centru.

Pentru $(r^2-c^2)=0$ avem un cerc a cărui centru e în origina coordonatelor, şi a cărui rază este egală cu rădăcina patrată din coeficientul de elasticitate, corespunzător direcţiei z, perpendiculară pe *xy*. Şi

Pentru: $(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)=0$ sau $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

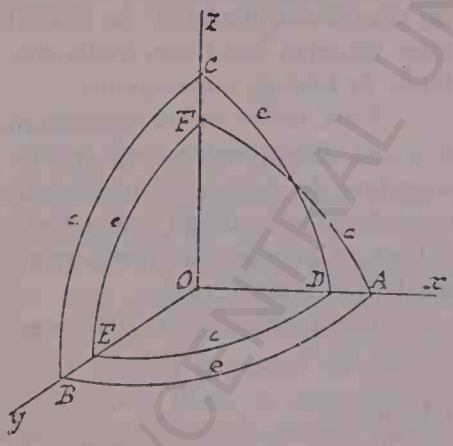


Fig. 511

avem o elipsă concentrică, a cărei jumătăţi de axă sunt rădăcinele patrate din coeficienţii de elasticitate corespondenţi direcţiunei celei-l-alte axe.

Dacă vom căuta secţiunile prin cele-l-alte planuri găsim încă două secţiuni: un cerc şi o elipsă, cum se vede în figura alăturată. (Fig. 511).

Putem face, după Fresnel, discuţia acestei formule pentru cazuri speciale. Aşa: pentru substanţele izotrope sau pentru cristalii uniacşi ajungem la aceleaşi rezultate pe care le dă experienţa.

Să examinăm ce devine formula pentru cristalele uniaxe. Pentru aceasta va trebui să facem în formula (2): $a=b$. Vom ave:

$$(r^2-a^2)[(r^2-c^2)a^2(x^2+y^2)+(r^2-a^2)c^2z^2]=0$$

Adaogând şi scăzind în parenteză cantitatea $(r^2-c^2)a^2z$ avem:

$$(r^2-a^2)[(r^2-c^2)a^2(x^2+y^2+z^2)+(r^2-a^2)c^2z^2-(r^2-c^2)a^2z^2]=0$$

şi fiind că: $r^2=x^2+y^2+z^2$
rezultă: $r^2(r^2-a^2)[a^2(r^2-c^2)+z^2(c^2-a^2)]=0$
sau: $r^2(r^2-a^2)[a^2(x^2+y^2)+c^2z^2-a^2c^2]=0$

Putem descompune această ecvaţiune în două: $r^2-a^2=0$ care este ecvaţia unui cerc corespunzător unei sfere; şi

$$a^2(x^2+y^2)+c^2z^2-a^2c^2=0 \text{ sau } \frac{x^2+y^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}-1=0$$

care este ecvaţia unui elipsoid de revoluţie în jurul lui Ox, a cărui semi-axă de revoluţie este *a*, care este raza sferei; şi după cum avem $a^2>c^2$ sau $a^2<c^2$ elipsoidul este interior sau exterior sferei, iar cristalul este pozitiv sau negativ.

Pentru cristalele biaxe, cele trei axe de elasticitate, se pot confunda sau nu cu axele cristalografice, după sistemul cristalin considerat.

Dar, când o axă de elasticitate nu se confundă cu o axă cristalografică, constatăm prin experienţă că, direcţia axei de elasticitate variază cu lungimea de undă a luminei care trece prin cristal, ceia ce se exprimă zicând că: este *dispersiunea axelor de elasticitate*, fenomen pe care-l vom examina când vom studia cristalele în lumina convergentă.

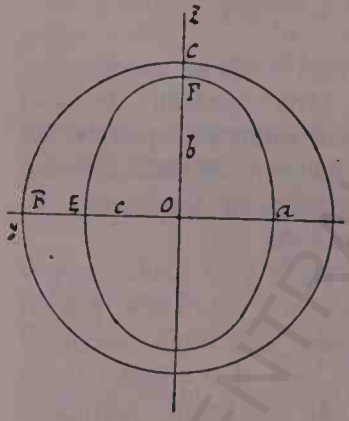


Fig. 512

— Fiind că cei trei coeficienţi: *a*, *b*, *c* sunt diferiţi pentru aceşti cristali, suprafaţa de undă este reprezentată în secţiune prin figura precedentă şi fiind că admitem $a>b>c$, avem rezultatele următoare:

Secţiunea prin planul YOZ este un cerc BC exterior de rază *a* şi o elipsă interioară EF, având axele: OF = b, OE=c (Fig. 512). Secţiunea prin planul XOY ne dă un cerc interior OE de rază *c* şi o elipsă exterioară a cărei axe sunt: OB=*a* şi OA = *b*. (Fig. 513).

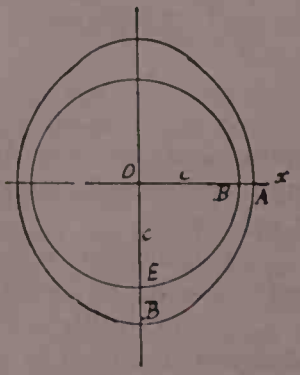


Fig. 513

In fine, secţiunea prin planul XOZ este: un cerc AF de rază OA=b şi o elipsă CD, a cărei axe sunt: OC=a şi OD=c. Aceste două curbe se tae în

punctele N, N′, N″, N‴, aşa că porţiunile FN şi ND sunt interioare pe când CN şi NA sunt exterioare. (Fig. 514).

Dacă considerăm intersecţia complectă prin planul XOZ, vedem că sunt patru puncte N, care sunt comune şi napei interioare şi napei exterioare. Fiind că a > b > c, vedem că: Ox este axa perpendiculară pe cercul de rază *a* şi se chiamă *axă de cea mai mare elasticitate*, pe când Oy şi Oz perpendiculare pe cercurile de rază *b* şi *c* sunt: cea întâi: *axă de elasticitate medie* şi cea a doua: *axă de cea mai mică elasticitate.*

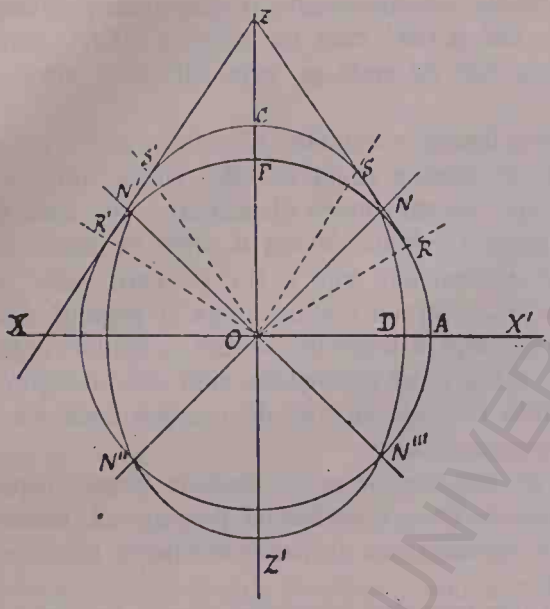


Fig. 514

Dacă aplicăm construcţia lui Huygens, constatăm: 1⁰ că în cristalele biaxe, suprafaţa undei este compusă din două nape şi că nici una din ele nefiind sferică, rezulta că fiecare rază incidentă se descompune în două raze refractate şi că ambele sunt raze extraordinare. 2⁰ că, dacă planul de incidenţă coincide cu unul din cele trei planuri principale, cele două raze refractate rămân în planul de incidenţă. In acest caz intersecţia suprafeţei de undă cu planul de incidenţă dă: un cerc şi o elipsă. Raza corespunzătoare secţiunei circulare are o viteză constantă V în planul de incidenţă, şi prin urmare un indice de refracţiune constant. Cea-l-altă rază nu mai are indice de refracţiune constant, însă ia valori determinate, când este perpendiculară pe axa de: mare, mijlocie sau mică elasticitate. Avem atunci:

$$n_a = \frac{V}{a}, \quad n_b = \frac{V}{b}, \quad n_c = \frac{V}{c},$$

n_a, n_b, n_c fiind cele trei valori a indicilor de refracţie, determinate în aceste condiţii.

Dacă considerăm planul tangent RS la elipsă şi la cerc, putem constata prin aplicarea construcţiei lui Huygens că, după ON unda plană se poate propaga cu aceiaş viteză, ori care ar fi polarizarea ei. Această direcţiune este *o axă optică*. Vedem că există două axe: ON şi ON', care fac unghiul NON' determinat prin forma suprafeţei de undă şi prin valoarea vitezelor principale.

Din considerarea figurei constatăm că: dacă raza *b* a cercului AF scade până ce devine egală cu OD, axele optice se apropie de axa Ox. de cea mai mare elasticitate, cu care ele se confundă când OA=OD. Atunci avem o sferă de rază *c* învălită de un elipsoid a cărui axe sunt *a* şi *c* şi care este de revoluţie în jurul lui Ox. Cristalul devine uniax şi negativ. Cristalii biaxi, a căror bisectriţă a unghiului ascuţit a axelor optice coincide cu axa de cea mai mare elasticitate, sunt *cristali negativi*. Când această bisectriţă coincide cu axa de cea mai mică elasticitate, cristalii se numesc *pozitivi*.

— Să vedem acuma cum se poate deduce forma suprafeţei de undă în cristalii biaxi, considerând propagarea undelor şi suprafaţa vitezelor normale sau propagarea razelor luminoase şi suprafaţa de undă.

Vom considera dar mai întâi *elipsoidul invers*. La cristalele biaxe elipsoidul invers are cele trei axe neegale n_p, n_m şi n_g. n_m având o valoare variabilă între n_g şi n_p. (Fig. 515). In acest solid o secţiune oare care trebue să fie o elipsă, iar secţiunile care trec prin câte două axe principale sunt *secţiunele principale*. Insă alături de aceste mai sunt încă două secţiuni care trec prin n_m şi cari au pentru cea-l-alta axă tot valoarea n_m; ele sunt nişte cercuri şi se numesc: *Secţiuni ciclice*. (Fig. 516). Aceste două secţiuni se tae după un unghiu a cărui valoare depinde de acea a lui n_m în raport cu n_g şi n_p. Cele două normale ON şi ON' la aceste secţiuni sunt conţinute în planul n_g n_p; după aceste direcţiuni se propagă o undă unică cu o

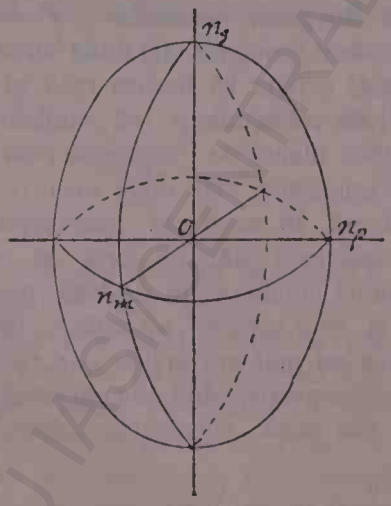


Fig. 515

viteză egală cu $V_m = \frac{1}{n_m}$ polarizată într'un plan oare care. Aceste două direcţiuni sunt *axele optice*, iar planul n_g n_p care le conţine se chiamă: *planul axelor optice*. Aceste axe optice formează între ele un unghiu ascuţit 2 V, a cărui valoare depinde de valorile lui n_g, n_m şi n_p, şi poate ave ca bisectrice sau pe n_g sau pe n_p. Când n_g este bisectriţa ascuţită a unghiului axelor optice cristalul este *pozitiv*; când e n_p cristalul e *negativ*.

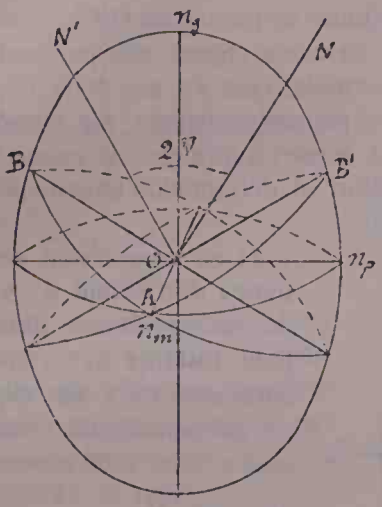


Fig. 516

Dacă considerăm o direcţiune oarecare de propagare, în afară de o secţiune principală, se constată că, după această direcţiune se propagă două unde polarizate normal, a căror viteze deosebite sunt proporţionale cu semi-axele elipsei corespondente acestei direcţiuni. Pentru o altă direcţiune vom ave o altă secţiune, a cărei axe sunt deosebite de a celei întâi. Deci, după o direcţiune oarecare se propagă două unde extraordinare, vitezele şi planurile de polarizaţiune variind cu direcţiunea considerată. Dar dacă considerăm direcţiunea de propagare conţlnută într'o secţiune principală n_g n_p, secţiunea normală corespondentă acestei direcţiunl va trebui să treacă prin axa respectivă a elipsoidului, n_m în cazul nostru, pe când cea-l-altă axă, a elipsei de secţiune, conţinută în secţiunea principală considerată, va ave o lungime variabilă a cărei mărime va depinde de poziţia direcţiunei de incidenţă. (Fig. 517). Vom ave dar două unde din care: una polarizată

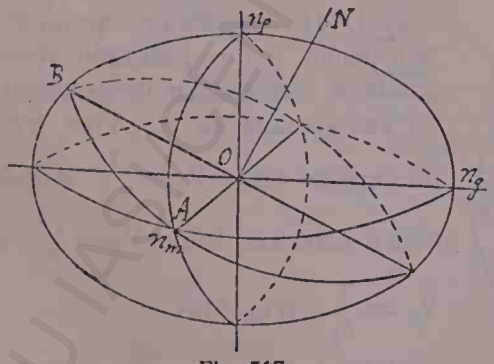


Fig. 517

în planul secţiunei principale, care conţine normala şi se propagă cu o viteză constantă, va fi unda ordinară; iar cea-l-altă unda

extraordinară care se propagă cu o viteză care variază între două limite, a căror valori sunt invers proporţionale cu axele secţiunei principale considerate, polarizată perpendicular pe această secţiune principală.

Dacă acum pe fiecare direcţiune de propagare ON.... ducem lungimi invers proporţionale cu axele elipsei corespondente, vom obţine suprafaţa vitezelor normale, care va ave două nape şi va fi simetrică în raport cu trei planuri principale ale elipsoidului. Am văzut care este ecvaţia acestei suprafeţe, şi pentru a ne da seamă de forma sa, va trebui să determinăm intersecţiele sale cu cele trei planuri principale.

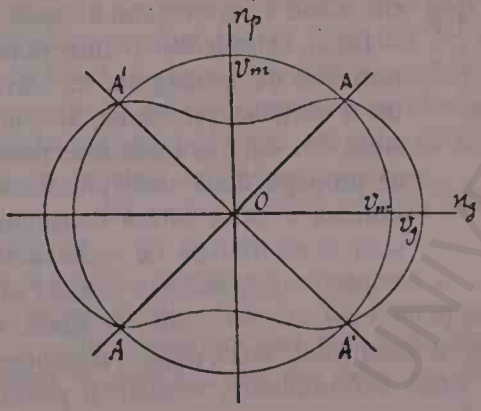


Fig. 518

1) Să considerăm secţiunea prin planul $n_g\ n_p$; ducând pe fiecare direcţiune distanţe invers proporţionale cu axele elipsei corespondente; vom obţine: mai întâi *un cerc* de rază $Vm = \frac{1}{n_m}$ şi *o ovală* având ca axe: $V_p = \frac{1}{n_g}$ şi $V_g = \frac{1}{n_p}$ (Fig.518) Aceste doua curbe se tae în patru puncte prin care trec axele optice AA şi A'A' după care viteza de propagare este $V_m = \frac{1}{n_m}$.

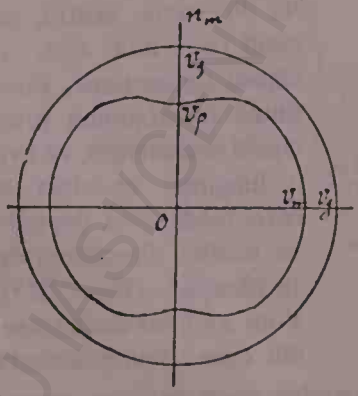


Fig. 519

2) Dacă considerăm secţiunea prin planul $n_g\ n_m$, elipsele corespondente direcţiunilor de propagare au axă comună pe n_p. Vom ave: un cerc de rază: $V_g = \frac{1}{n_p}$ şi o ovală a cărei axe sunt: $V_m = \frac{1}{n_m}$ şi $V_p = \frac{1}{n_g}$. (Fig. 519)

3) Pentru secţiunea prin planul $n_m\ n_p$, elipsele corespondente au axa comună n_g, şi vom obţine ca secţiune: un cerc de rază

$V_p = \frac{1}{N_g}$ şi o ovală a cărei axe sunt : $V_m = \frac{1}{N_m}$ şi $V_g = \frac{1}{N_p}$ (Fig. 520).

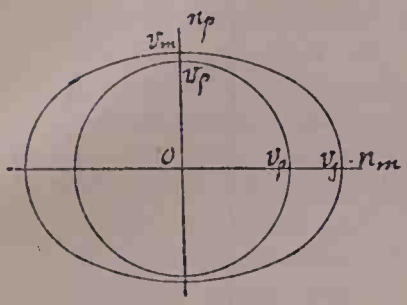


Fig. 520

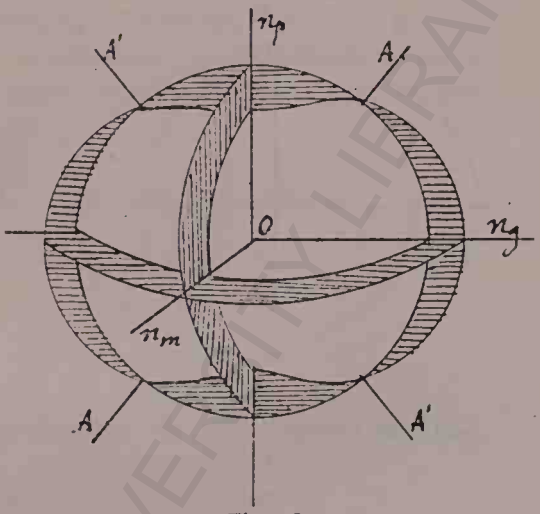


Fig. 521

— Dacă considerăm în acelaş timp cele trei secţiuni, vedem că: suprafaţa vitezelor normale e compusă din două nape din care: una internă care va ave patru puncte în relief, care corespund cu patru puncte ombilicale ale napei exterioare. Prin aceste patru puncte comune trec cele două axe optice (Fig. 521).

— Să considerăm acum în cristalele biaxe *elipsoidul direct*.

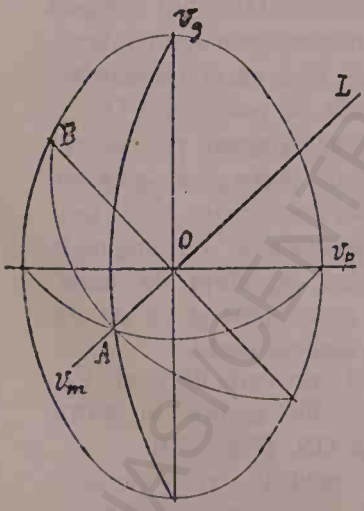


Fig. 522

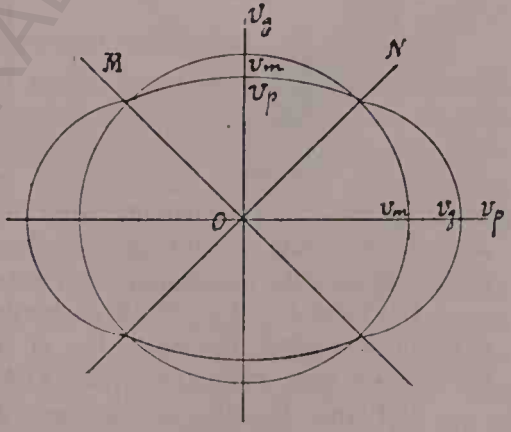


Fig. 523

El va ave cele trei axe neegale: V_g , V_m şi V_p, va da două secţiuni ciclice, a căror rază este V_m şi a căror normale, conţinute în planul V_g V_p sunt axele optice. Aceste axe nu coincid

cu acele găsite la suprafaţa vitezelor, şi pentru a se deosebi

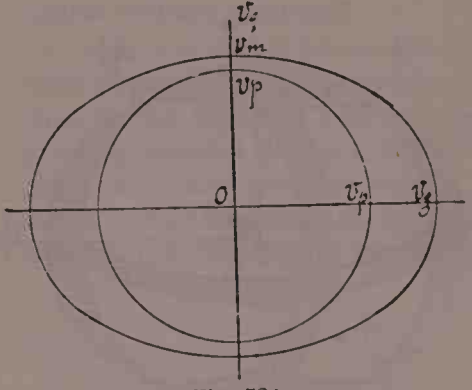


Fig. 524

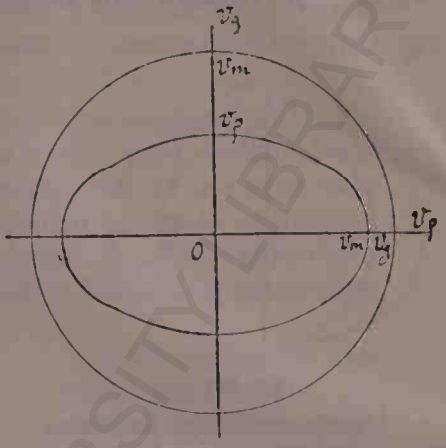


Fig. 525

au fost numite: *axe de refracţiune conică internă.* (Fig. 522). Dacă considerăm o direcţiune oarecare OL de propagare, după această direcţiune se pot propaga două raze, a căror viteze de propagare sunt proporţionale cu semiaxele OA şi OB a elipsei corespondente acestei direcţiuni şi a căror valoare depinde de poziţia lui OL.

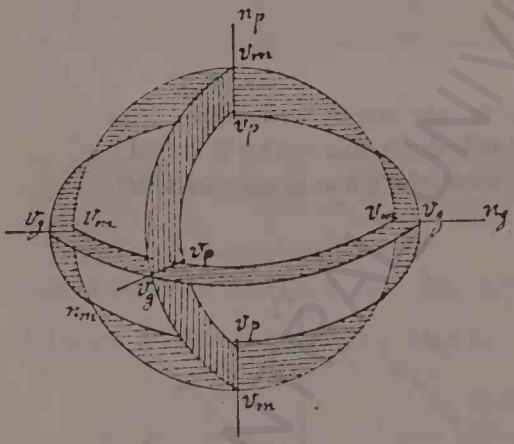


Fig. 526

Dacă ducem pe direcţiele de propagare, vitezele celor două raze, care sunt proporţionale cu lungimele axelor elipselor corespondente, vom obţine suprafaţa de undă. Această suprafaţă va ave de asemenea două nape şi va da, ca intersecţii cu cele trei planuri principale, diverse curbe:

1) Planul V_g V_p ne dă ca secţiuni: un cerc de rază V_m şi o elipsă a cărei axe sunt: V_g şi V_p. Ele se taie în patru puncte prin care trec axele optice OM şi ON. (Fig. 523).

2) Planul V_g V_m dă: un cerc de rază V_p şi o elipsă a cărei axe sunt V_g şi V_m. Aceste două curbe sunt concentrice şi nu se taie. (Fig. 524).

3) In planul V_p V_m vom ave ca secţiuni: un cerc de rază V_g şi o elipsă a cărei axe sunt: V_m şi V_p (Fig. 525). Suprafaţa de undă va avedeci două nape: una externă alta internă, care se ating în patru puncte comune prin care trec axele optice. (Fig. 526).

— Dacă comparăm acuma suprafaţa de undă, cu suprafaţa vitezelor, constatăm că ele au aceleaşi axe, fiind că elipsoidul direct şi invers, au axele reciproce. Razele ordinare se propagă în cele trei planuri principale cu aceiaş viteză ca şi undele plane, pe când razele extraordinare nu coincid cu normala la unda lor plană. Curbele atinse în secţiunile principale de undele plane sunt ovale, pe când acele atinse de raze sunt elipse şi aceasta din cauză că în suprafaţa vitezelor normale, ovala este reciproca elipsei de secţiune principală în elipsoidul invers, pe când în suprafaţa de undă curba obţinută este însuşi elipsa. (Fig. 527). Deci: punctele ombilicale a suprafeţei vitezelor nu se confundă cu acele a suprafeţei de undă şi prin urmare axele optice nu se confundă cu axele de refracţie conică internă.

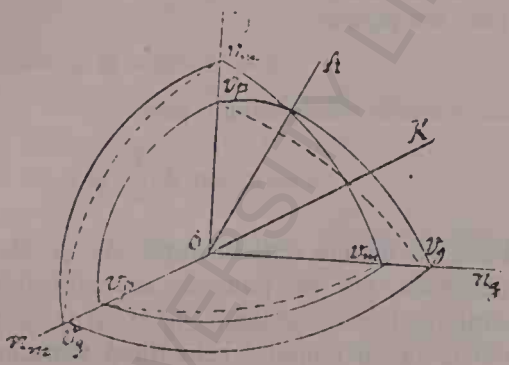


Fig. 527

CAP. IX.

Polarizaţia cromatică

Sub acest titlu vom studia toate fenomenele de coloraţie, care au loc, când se interpune între un polarizor şi un analizor o lamă subţire cu feţe paralele, aparţinând unei substanţe birefringente. Vom studia mai întâi teoria acestor fenomene.

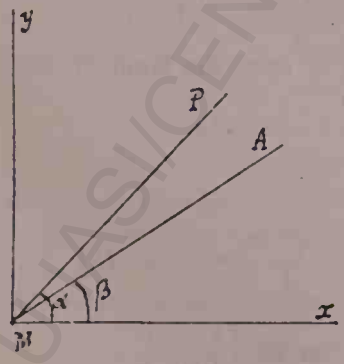


Fig. 528

Să presupunem că operăm în lumină monocromatică. Fie o undă polarizată plană, paralelă cu planul figurei, care reprezintă suprafaţa unei lame cristaline subţiri (Fig. 528). Fie MP direcţiunea de vibraţiune a acestei unde incidente, făcând un unghiu α cu Mx. Insă după ceia ce ştim deja, lama cristalină nu poate lasa să se propage fără alteraţie de cât

vibraţiunele după două direcţiuni dreptunghiulare Mx şi My. Viteza de vfbraţiune a undei incidente fiind dată prin :

$$v = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Ştim că o putem considera ca rezultatul suprapunerei a două vibraţiuni dirijate după Mx şi My a căror amplitudini sunt date prin relaţiunele

$$a_1 = a \cos \alpha \text{ şi } a_2 = a \sin \alpha$$

iar vitezele vibraţiunelor prin:

$$v_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ şi } v_2 = a_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Fiind că undele dirijate după Mx şi My se propagă cu viteze deosebite, ele vor pune de asemeni timpuri deosebite pentru a strabate lama cristalină: fie θ_1 şi θ_2 aceste timpuri. La eşirea din lamă, în timpul t cele două vibraţiuni vor fi aceleaşi ca la intrare în timpurile $(t-\theta_1)$ şi $(t-\theta_2)$. Vitezele corespondente vor fi:

$$v'_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t-\theta_1}{T} \text{ şi } v'_2 = a_2 \sin 2\pi \frac{t-\theta_2}{T}$$

Dacă punem: $t-\theta_1 = t'$ de unde: $t = t' + \theta_1$,

Atunci: $t-\theta_2 = (t'+\theta_1)-\theta_2 = t'-(\theta_2-\theta_1)$

şi prin urmare:

$$v'_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t'}{T} \text{ şi } v'_2 = a_2 \sin 2\pi \left[\frac{t'}{T} - \frac{\theta_2-\theta_1}{T}\right]$$

Deci, vibraţiunele după Mx şi My, au la eşire din lamă, o diferenţă de fază de :

$$2\pi \frac{\theta_2-\theta_1}{T}$$

Pentru prescurtare să punem : $\frac{\theta_2-\theta_1}{T} = \tau \ldots (1)$

Atunci vom ave : $v'_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \tau\right)$

Insă noi ştim că două vibraţiuni dreptunghiulare nu pot interfera; pentru a le face paralele să facem să intervină un analizor, care nu lasă să treacă de cât vibraţiunele după MA, care face cu Mx un unghiu β. Atunci cele două vibraţiuni ce iesă din lama cristalină, dau fiecare o componentă după MA, a căror amplitudini sunt:

$$a'_1 = a_1 \cos\beta = a \cos\alpha \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$a'_2 = a_2 \sin\beta = a \sin\alpha \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Iar vitezele sunt:

$$v''_1 = a'_1 \sin 2\pi \frac{t'}{T} \text{ şi } v''_2 = a'_2 \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \tau\right)$$

Aceste două componente fiind paralele vor putea fi compuse şi vor da o rezultantă:

$$v'' = v''_1 + v''_2.$$

Inlocuind valorile lui v''_1 şi v''_2 şi însemnând cu A amplitudinea rezultantă, vom ave:

$$v'' = A \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \varphi\right)$$

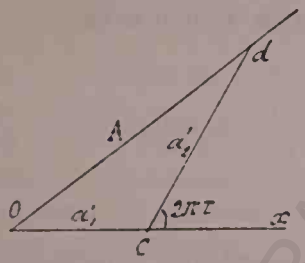


Fig. 529

Pentru a ave valoarea lui A, vom proceda după metoda lui Fresnel. (Fig. 529) Pe o dreaptă *Ox* luăm o lungime $Oc = a'_1$, şi prin punctul *c* ducem dreapta $cd = a'_2$ care face cu Ox unghiul: $dcx = 2\pi\tau$. Atunci dreapta *Od* reprezintă valoarea lui A, şi din triunghiul *Ocd* deducem relaţiunea:

$$Od^2 = A^2 = a'^2_1 + a'^2_2 + 2a'_1 a'_2 \cos 2\pi\tau.$$

Pentru a face în membrul al doilea un patrat perfect adăogăm şi scădem: $2a'_1 a'_2$ şi avem:

$$A^2 = (a'_1 + a'_2)^2 - 2a'_1 a'_2 + 2a'_1 a'_2 \cos 2\pi\tau \text{ sau:}$$

$$A^2 = (a'_1 + a'_2)^2 - 2a'_1 a'_2 (1 - \cos 2\pi\tau).$$

Insă: $1 - \cos 2\pi\tau = 2 \sin^2 \pi\tau$

deci: $A^2 = (a'_1 + a'_2)^2 - 4a'_1 a'_2 \sin^2 \pi\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

Şi dacă înlocuim valorile lui a'_1 şi a'_2 date de relaţiile (2) şi (3). vom ave:

$$A^2 = a^2 (\cos\alpha \cos\beta) + (\sin\alpha \sin\beta)^2 - 4a^2 \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta \sin^2 \pi\tau$$

sau: $$A^2 = a^2 \left(\cos^2 (\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau.\right)$$

Dacă însemnăm cu I intensitatea vibraţiunii incidente şi cu I' in-

tensitatea vibraţiunei care iesă după MA, ştiind că intensităţile sunt proporţionale cu patratele amplitudinelor, vom putea scrie:

$$\frac{I'}{I}=\frac{A^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}\left(\cos^2(\beta-\alpha)-\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau\right) \text{ sau:}$$

$$\frac{I'}{I}=\cos^2(\beta-\alpha)-\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Pentru a pute face discuţia acestei formule trebue să înlocuim valorile lui τ prin altele în funcţiune de e grosimea lamelei cristaline. Dacă Vx şi Vy sunt vitezele de propagare a vibraţiunilor după Mx şi My, vom putea scrie:

$$\theta_1=\frac{e}{Vx} \text{ şi } \theta_2=\frac{e}{Vy}$$

şi fiindcă: $\tau=\frac{\theta_2-\theta_1}{T}$ urmează că:

$$\tau=\frac{1}{T}\left(\frac{e}{Vy}-\frac{e}{Vx}\right)=\frac{e}{T}\left(\frac{1}{Vy}-\frac{1}{Vx}\right)$$

Dacă V reprezintă viteza de propagare a vibraţiunelor în aer înmulţind şi împărţind al doilea membru cu V vom avea:

$$\tau=\frac{e}{VT}\left(\frac{V}{Vy}-\frac{V}{Vx}\right)$$

Şi fiindcă $VT=\lambda$ corespunzătoare luminei monocromatice în care operăm, şi:

$$\frac{V}{Vy}=n_y \text{ şi } \frac{V}{Vx}=n_x$$

n_x şi n_y fiind indicii de refracţiune corespunzetori direcţiunilor M_x şi M_y, urmează că:

$$\tau=\frac{e}{\lambda}\left(n_y-n_x\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

— Şi acum când avem valorile lui τ în funcţiune de e, λ, n_y şi n_x să discutăm formula (5):

$$\frac{I'}{I}=\cos^2(\beta-\alpha)-\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau .$$

Observăm că, al doilea membru al formulei se compune din 2 termeni: cel întâi care este $\cos^2(\beta-\alpha)$ este independent de λ; şi al doilea, $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau$ depinde de λ prin valoarea lui τ.

a) Să presupunem că al doilea termen e nul, pentru toate valorile lui τ, adică avem:

$$\sin 2\alpha=0 \text{ şi deci } \sin 2\beta=0$$

Atunci formula (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha) \ldots \ldots (5,)$$

Această relaţie ne arată mai întâi că, raportul $\frac{I'}{I}$ este independent de λ. Atunci, dacă operăm în lumina albă, lumina care iesă e tot albă, însă mai mult sau mai puţin intensă după valoarea lui $\cos^2(\beta - \alpha)$ adică poate varia de la alb la gri sau negru. — Pentru aceasta s'a admis ca, acest termen: $\cos^2(\beta - \alpha)$ să se numească: *termen incolor.*

l) Presupunem acuma că, primul termen este nul. Vom ave:

$$\cos^2(\beta - \alpha) = 0 \text{ deci: } (\beta - \alpha) = \pm \frac{\pi}{2}$$

şi deci: $2\beta = 2\alpha \pm \pi$ şi prin urmare:

$$\sin 2\beta = -\sin 2\alpha.$$

Atunci formula (5) devine:

$$\frac{I'}{I} \cdot \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Deci: valoarea lui I' depinde de τ şi prin urmare după relaţia (6) depinde de λ. — Atunci, dacă operăm în lumină albă, fiind că ea e compusă din radiţiuni simple, pentru care λ variază, lumina care va eşi nu va mai fi albă. In adevăr putem să presupunem că grosimea lamei e aşa în cât, raportul care dă valoarea lui τ pentru o radiţiune oarecare: roşie, violetă etc. este un număr întreg: 2,3 . . . . . Atunci avem:

$$\sin^2 \pi\tau = \sin^2 2\pi = \sin^2 3\pi = \ldots\ldots = 0$$

Deci: intensităţile luminelor roşie, violetă etc. ce iesă din lamelă sunt nule. Insă, pentru una din radiaţiunile intermediare între roş şi violet, τ ia valori cuprinse între 2 şi 3, şi atunci acea culoare va lua la ieşire din lamelă intensitatea maximum: *lama apare deci colorată.* — Pentru acest motiv al doilea termen: $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau$ se numeşte *termen colorat.*

c) Dacă nici unul din termeni nu este nul, atunci vom ave o intensitate compusă din doi termeni, din care, unul incolor şi altul colorat, ceia ce înseamnă că, lumina va eşi tot colorată, însă intensitatea sa va fi mai mică decât în cazul când termenul incolor e nul.

— Să examinăm acuma ce se întâmplă când înturnăm sau polarizorul sau analizorul lăsând fixă lama şi cel-alt nicol.

Trebue mai întâi să remarcăm că: dacă întoarcem analizorul de 90°, unghiul β ce face secţiunea sa principală cu M_x devine:

$$\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$$

Atunci lumina emergentă are o altă intensitate I' a cărei valoare este:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta' - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta' \sin^2 \pi\tau. \text{ sau:}$$

$$\frac{I'}{I} = \sin^2(\beta - \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dacă adunăm egalitatăţile (5) şi (7) avem:

$$\frac{I' + I''}{I} = 1 \text{ sau; } I' + I'' = I.$$

Deci: *intensităţile corespunzătoare la două poziţiuni ale analizorului diferite de 90° sunt astfeliu că: suma lor este egală cu intensitatea luminei incidente.* Aşa, pentru cazul luminei albe, culorile corespondente acestor poziţiuni a analizorului sunt astfeliu că, prin suprapunerea lor dau lumina albă, deci sunt *culori complimentare.* Aşa: pentru culoarea roşie, după o rotaţiune de 90° a analizorului substanţa se colorează în verde, complimentara roşului; Pentru albastru avem galben etc.

Este evident că, dacă facem să se învârtească polarizorul sau analizorul, valorile lui α sau β variază. In aceste variaţiuni valorile lor pot fi aşa ca să avem: $\sin 2\alpha = 0$ sau $\sin 2\beta = 0$.

Să presupunem mai întâi: $\sin 2\alpha = 0$. Când α variază, adică facem să se întoarcă polarizorul, termenul colorat trecând prin zero, schimbă de semn, Dacă în acelaş timp $\sin 2\beta$ nu se anulează termenul colorat schimbă de semn; deci prin variaţia lui α mai întâi coloraţia slăbeşte şi când $\sin 2\alpha = 0$, substanţa devine incoloră şi avem:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha).$$

In urmă α variind mai departe, apare culoarea complimentară.

α). *Să facem să se învârtă analizorul.* Atunci variază β iar α rămâne constant. Pentru $\sin 2\beta = 0$ termenul colorat se anulează; însă aceasta corespunde la 4 valori a lui β: 0, $\frac{\pi}{2}$, π şi $\frac{3\pi}{2}$ pentru care imagina nu e colorată. Deci: când secţiunea principală a analizorului coincide cu una din cele două direcţiuni dreptunghiulare de vibraţiune a lamei, imagina este incoloră. Dar dacă $\sin 2\alpha$ nu este nul, atunci lumina e colorată şi dacă

înturnăm analizorul în acelaş senz, pentru o rotaţie de 90° avem culoarea complimentară. (Fig. 530.) Aşa: să presupunem că pentru poziţia MA lama este colorată în albastru; când ea ajunge în MA', lama va fi colorată în galben. complimentara albastrului.

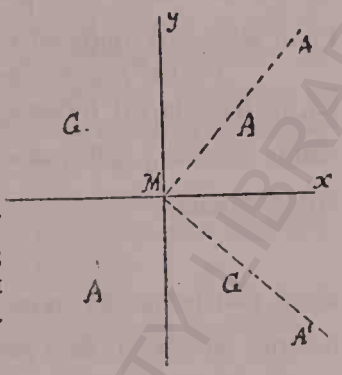


Fig. 530

β) *Dacă înturnăm polarizorul*, atunci α variază şi β rămâne constant; însă formula (5) e simetrică în raport cu α şi β; deci vom ave aceleaşi fenomene.

γ) *Dacă înturnăm lamela*, polarizorul şi analizorul rămânând fixi, atunci constatăm faptele următoare:

Dacă secţiunile principale ale polarizorului şi a analizorului nu sunt nici paralele nici perpendiculare, adică (β—α) nu este nici nul nici $\frac{\pi}{2}$, valoarea lui (β- α, rămâne constantă şi termenul incolor nu se schimbă. In acest caz, sin 2α şi sin 2β nu se pot anula simultan. Dacă sin 2α=0, ceia ce are loc pentru valorile:

$$\alpha=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

termenul incolor se anulează schimbând de semn. — Dacă sin 2β=0, pentru aceleaşi valori a lui β, termenul colorat se anulează schimbând de semn. Deci sunt în total 8 poziţiuni pentru care lamela este incoloră, iar între aceste poziţiuni, lamela e colorată şi culorile sunt complimentare.

— Putem ave cazuri particulare.

1) Când α=β, care corespunde cazului când nicolii sunt paraleli. Atunci avem numai patru poziţiuni pentru care lumina este albă, iar între aceste poziţiuni culoarea e aceeaşi. Avem atunci:

$$\frac{I'}{I}= 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Deci termenul colorat nu schimbă de semn, când sin 2α se anulează. Şi

2) Când $\alpha+\frac{\pi}{2}=\beta$ adică nicolii sunt în cruce. Vom ave iarăşi 4 poziţiuni pentru care lumina este albă; însă de astă dată între aceste patru poziţiuni, culoarea este complimentară celei precedente. — Formula (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau$$

Când $\sin 2\alpha = 0$, obţinem obscuritate.

— Pentru a ave culoarea cea mai vie, trebue mai întâi ca, în formula (5) termenul incolor să fie nul, ceia ce are loc când: $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, adică atunci când polarizorul şi analizorul sunt în cruce. Atunci:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Apoi, mai trebue să avem maximul intensităţii, ceia ce are loc pentru: $\sin^2 2\alpha = 1$, deci pentru $\tau = \frac{\pi}{4}$ sau $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Deci: secţiunea principală a lamelei trebue să facă un unghiu de 45° faţă de secţiunea principală a polarizorului sau analizorului.

CAP. X.

Polarizaţia cromatică în lumină convergentă

Fenomenele pe care le-am analizat până acuma pot fi studiate în două moduri: *în lumină paralelă*, care după cum am văzut în cele precedente, ne dau fenomenele de coloraţie uniformă a lamelor cristaline, aşa după cum a rezultat din analiza făcută formulei (5); sau *în lumină convergentă*, adecă atunci când lamela cristalină e străbătută de raze care nu mai sunt paralele, dar convergente.—In acest caz se obţin fenomene particulare, a căror explicare se face tot cu ajutorul formulei (5). Să examinăm mai întâi mersul razelor în acest caz.

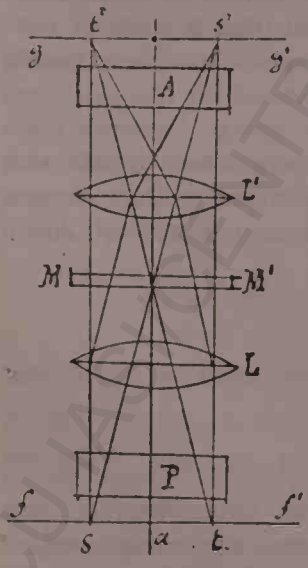


Fig. 531

Fie o lamelă cristalină MM' între un polarizor P şi un analizor A. (Fig. 531). Să interpunem între lamelă şi fiecare nicol câte o lentilă convergentă: fie L şi L' aceste lentile, iar ff' şi gg' planurile lor focale. Să considerăm punctul *s* în planul focal al lentilei L; el va trimite raze care după ce au străbătut lentila L şi lama cristalină, sunt primite de lentila L', care le concentrează în punctul *s'* în planul focal *gg'*. Fiind că aceste raze au trecut prin P şi A, în punctul *s'* va fi de sigur lumină colorată. Dacă considerăm un alt punct *t*, este evident

că, razele pe care le va trimite, vor traversa lama sub o altă incidenţă, aşa că, imagina sa t' va fi colorată altfeliu de cât s'; deci, în planul focal gg' nu vom avea o coloraţie uniformă, dar figuri colorate. Pentru examenul acestor fenomene ne servim de aparate speciale, de care ne vom ocupa mai târziu. Pentru moment ne vom ocupa cu teoria acestor fenomene.

— După cele ce am văzut mai înainte, pentru fiecare direcţie a razelor, intensitatea luminoasă a imaginei este dată prin formula (5):

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi\tau.$$

Toate punctele pentru care τ este acelaş, vor ave aceiaş coloraţie, câtă vreme productul *sin* 2α *sin* 2β conservă acelaş semn; după ce au trecut prin valoarea zero, ele schimbă de semn, deci coloarea va trece la cea complimentară. Liniele corespondente aceleaşi valori a lui τ vor fi colorate cu o culoare oare care sau complimentara sa: ele se numesc: *linii izocromatice.*

Liniile corespunzătoare lui $\sin 2\alpha$ 0 sau $\sin 2\beta = 0$ pentru care productul. $\sin 2\alpha \sin 2\beta = 0$. sunt incolore şi se cheamă: *linii neutre.*

— Forma liniilor izocromatice se poate deduce prin studlul *suprafeţei izocromatice a lui Bertin.*

Să considerăm un cristal şi în interior un punct 0 prin care trec razele vectorii ρ aşa, încît între două raze luminoase cu vibraţiuni dreptunghiulare, care se propagă după această direcţiune, se stabileşte o diferenţă de drum ε, care este aceiaşi pentru ori care direcţiune. Locul geometric al razelor vectorii astfeliu definite este o suprafaţă pe care Bertin a numit-o: *suprafaţa izocromatică.*

Este evident că, cele două raze care se propagă în aceste direcţiuni, vor ave viteze de propagare diferite. Să le însemnăm cu V_1 şi V_2. — Dacă T este durata unei vibraţiuni, trebuie să avem:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{T}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \quad \text{sau}$$

$$\varepsilon T = \rho\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Raza vectorie ρ este determinată prin unghiurile α, β, γ

pe care le face cu axele ; şi fiind că : $\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}$ depinde de α, β, γ, rezultă că: *ecvaţiunea (1) poate fi considerată ca ecvaţia polară a suprafeţei izocromatice.*

— Am văzut că, dacă considerăm o lamă cristalină M M' în faţa unei lentile L L', care presupunem că este obiectivul unui microscop, a cărei plan focal este FF', (Fig. 32). şi dacă NN' reprezintă axa optică a acestui obiectiv, atunci o raza SI care cade pe faţa lamei în punctul I unde o străbate axa, această rază fiind polarizată, intrând în lamela cristalină, se va desface în două raze: IO şi IE care după ce au străbătut lama, ies paralél între ele şi paralel cu SI, şi sunt primîte de objectiv, care le reuneşte în punctul S' în planul focal, unde vine şi raza CS', paralelă cu IS. Ştim însă că, razele străbătând lama, capătă o diferinţă de drum, care nu mai variază, plecând de la planul OK, perpendicular pe direcţia lor la eşirea din lamă.

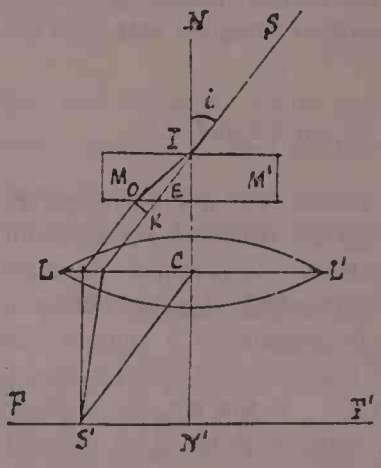


Fig 532

Această diferinţă de drum, care este ε al nostru, poate fi reprezentată prin :

$$\varepsilon = \frac{1}{T}\left(\frac{IE}{V_2} + \frac{EK}{V} - \frac{IO}{V_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

în care V, V_1, V_2 reprezintă vitezele de propagare în aer şi după IO şi IE. Insă din cauza micei diferenţe între IO şi IE, putem confunda direcţiile lor şi prin urmare să neglijăm pe EK, însemnând cu ρ lungimea comună IO şi IE, Atunci relaţiunéa (2) devine egală cu (1). Deci punctul I este centrul unei suprafeţe izocromatice, corespunzătoare diferinţei de drum ε, aşa că, dacă considerăm aceasta suprafaţă la eşirea din lamă, este evident că ea o va tăe după o linie, care se va bucura de proprietatea ca, toate direcţiunile care trec prin I şi ajung la această linie, vor avea acéiaşi diferinţă de drum.

Dacă considerăm unghiuri de incidenţă *i* foarte mici, vom pute scrie :

$$\frac{i}{r}=n.$$

şi atunci aceleaşi raze vor descrie în planul focal FF' a obiectivului o suprafaţă izocromatică. a cărel puncte precum S', vor ave aceiaşi diferenţă de drum δ şi vor da cu acest plan ca intersecţie o linie analoagă cu acea determinată pe faţa de ieşire a lamelei.

Deci: dacă considerăm suprafeţele izocromatice a căror centru este I şi pentru care valorile lui δ variază, vom pute să ne facem o idee de forma generală a acestor linii.

Considerăm deci formula (1) în care vom înlocui $\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}$ în funcţiune de α, β, şi γ şi după ce vom face reducerele necesare vom face discuţiunea formulei ce va rezulta. Trebue dar să găsim valorile lui V_1 şi V_2, care sunt razele vectorii corespondente celor două nape a suprafeţei undei.

Să considerăm atunci formula lui Fresnel:

$$r^4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-r^2(b^2+c^2)a^2x^2+(c^2+a^2)b^2y^2+(a^2+b^2)c^2z^2)+a^2b^2c^2r^2=0$$

în care înlocuim valorile:

$$x^2=r^2\cos^2\alpha,\ y^2=r^2\cos^2\beta,\ z^2=r^2\cos^2\gamma$$

şi după ce luăm pe r^2 în factor comun avem:

$$r^6(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)-r^4[(b^2+c^2)a^2\cos^2\alpha+(c^2+a^2)b^2\cos^2\beta+(a^2+b^2)c^2\cos^2\gamma]+r^2(a^2+b^2+c^2)=0$$

Impărţind prin r^6 vom ave:

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-\frac{1}{r^2}[(b^2+c^2)a^2\cos^2\alpha+(c^2+a^2)b^2\cos^2\beta+(a^2+b^2)c^2\cos^2\gamma]+\frac{1}{r^4}(a^2+b^2+c^2)=0 \quad . \quad . \quad (3).$$

Avem o ecvaţie în $\frac{1}{r^2}$ de al doilea grad, a cărei rădăcini sunt: $\frac{1}{V_2^2}$ şi $\frac{1}{V_1^2}$ şi atunci putem să scriem:

1). Că: suma rădăcinelor este egală cu coeficientul necunoscutei la primul grad schimbat de semn:

$$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}=(b^2+c^2)a^2\cos^2\alpha+(c^2+a^2)b^2\cos^2\beta+(a^2+b^2)c^2\cos^2\gamma.$$

care se poate scrie încă, împărţind al doilea membru prin:

$a^2 b^2 c^2$:

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\cos^2\alpha + \frac{c^2+a^2}{a^2c^2}\cos^2\beta + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\cos^2\gamma \quad . \quad , \quad (4)$$

2) Că: productul rădăcinelor este egal cu termenul independent de necunoscută:

$$\frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{1}{V_2^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Impărţind şi aici al doilea membru prin $a^2b^2c^2$ vom avea:

$$\frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{1}{V_2^2} = \frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Să considerăm acum ecvaţia (1) sub forma:

$$\frac{\partial T}{\rho} = \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$ şi să rădicăm la patrat:

vom ave: $\frac{\partial^2 T^2}{\rho^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{2}{V_1 V_2}$ sau;

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{\partial^2 T^2}{\rho^2} = \frac{2}{V_1 V_2}$$

Ridicând încă odată la patrat avem:

$$\left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{\partial^2 T^2}{\rho^2}\right)^2 = \frac{4}{V_1^2 V_2^2}$$

Să înlocuim în această ecvaţie valorile lui $\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$ şi $\frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{1}{V_2^2}$ găsite în (4) şi (5) şi înmulţind cu ρ^4 avem:

$$\left(\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\rho^2\cos^2\alpha + \frac{c^2+a^2}{a^2c^2}\rho^2\cos^2\beta + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\rho^2\cos^2\gamma - \partial^2 T^2\right)^2 -$$

$$- 4\rho^2\left(\frac{\rho^2\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\rho^2\cos^2\beta}{a^2c^2} + \frac{\rho^2\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Inlocuind: $x^2 = \rho^2\cos^2 a, y^2 = \rho^2\cos\beta$, $z^2 = \rho^2\cos^2\gamma$ vom ave:

$$\left[\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}x + \frac{c^2+a^2}{a^2c^2}y^2 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}z^2 - \partial^2 T^2\right]^2 = 4(x^2+y^2+z^2)$$

$$\left[\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{a^2c^2} + \frac{z^2}{a^2b^2}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Ecvaţia (A) reprezintă ecvaţia suprafeţei izocromatice în coordonate polare, pe când (B) în coordonate rectilinii, în care axele de coordonate sunt axele de elasticitate a cristalului.

—Să facem acum discuţia ecvaţiei (A),

Suprafaţa care corespunde acestei formule apare ca având două nape, căci sunt două valori a lui ρ^2 care satisfac ecvaţia (A), Insă suprafaţa izocromatică corespunzetoare ecvaţiei (I) care

este suprafaţa reală, nu este de cât cu o singură napă, deci calculele au introdus o soluţie parazită. Pentru a vede care este napa pe care trebue să o considerăm, observăm că: formula (A) dă două nape, din care: una închisă şi alta deschisă în direcţia axelor optice. ceia ce însamnă că: în aceste direcţiuni ρ devine infinit. Insă fiind că în direcţiunea unei axe optice avem: $V_1 = V_2$, relaţiunea (I) ne dă: $\rho = \infty$. Deci napa deschisă este singura care reprezintă suprafaţa izocromatică.

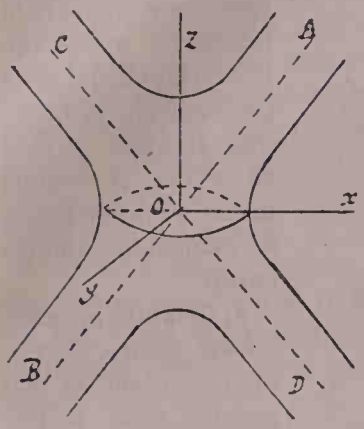


Fig. 533

Pentru cristalele biaxe avem: $a > b > c$, iar suprafaţa izocromatică e reprezentată prin prima din figurile precedente. Fig. 533). ramurile infinite sunt asimptote cilindrelor a căror generatrice sunt paralele cu axele optice.

Pentru cristalele uniaxe avem: $a = b > c$. suprafaţa izocromatică e reprezentată prin a doua figură: ea este o suprafaţă de revoluţie în jurul axei cristalului, a cărei secţiune prin un plan ce trece prin centru, este o hiperbolă. (fig. 534).

Ecvaţia (I) ne indică următoarele proprietăţi a suprafeţei izocromatice: Pentru valorile variabile a lui δ avem valori variabile pentru ρ: deci: *suprafeţele izocromatice corespunzătoare sunt homotetice şi homocentrice.* Cu cât δ este mai mare cu atât suprafaţa este mai îndepărtată de centru; când δ este infinit de mic, suprafeţele izocromatice se apropie de axa optică.

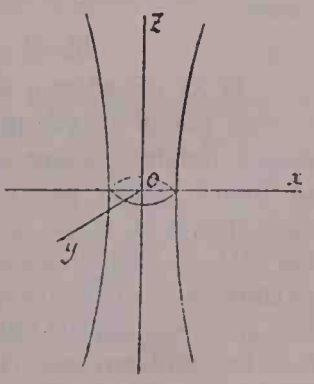


Fig. 534

Pentru a ne da samă de interpretarea acestor rezultate să considerăm lama MM^1 tăetă perpendicular pe bisectriţa ascuţită Az a axelor optice, şi având grosimea AB. (Fig. 535) Să construim intersecţia suprafeţei izocromatice corezpunzătoare la trei valori a lui δ, pentru planul ce trece prin această bisectriţă şi prin axele optice XX' şi YY'. Curbele determinate prin aceste trei suprafeţe izocromatice pe suprafaţa inferioară a lamelei projectate pe un plan orizontal ne vor da o figură, care va reprezenta aspectul curbelor

izocromatice când privim această lamă în lumină convergentă. Trebue dar să examinăm ceia ce se petrece în jurul punctelor care reprezintă intersecţia axelor optice cu faţa lamei tăetă perpendicular pe bisectriţa ascuţită; şi fiind că avem şi cristale uniaxe şi cristale biaxe, să examinăm ambele cazuri:

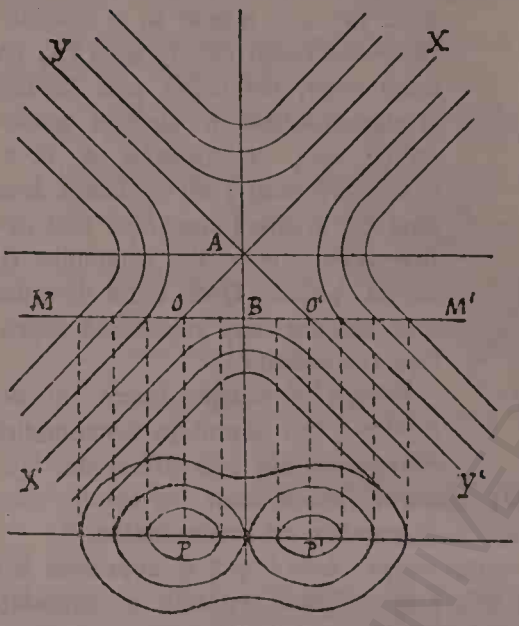


Fig. 535

a) **Cristale uniaxe.** *Liniele neutre.* Să considerăm cazul cel mai general, când secţiunea principală a analizorului face un unghiu oare care cu planul de polarizaţie a luminei incidente.

In acest caz: *Sin* 2α e diferit de $\pm$*Sin* 2β. Pentru a ave liniele neutre va trebui să facem:

$$\text{Sin } 2\alpha = 0 \text{ sau Sin } 2\beta = 0$$

1) Să considerăm primul caz. Am văzut că α este unghiul ce face planul de vibraţiune a luminei incidente cu una din secţiunele dreptunghiulare, care lasă să treacă lumina prin cristal şi care ajunge în *a* pe planul *ff'* (fig 531). Să admitem că este acea ce corespunde razei extraordinare. Mai ştim că, direcţia vibraţiunei razei extraordinare este conţinută în planul care trece prin direcţia razei în cristal şi prin axă.

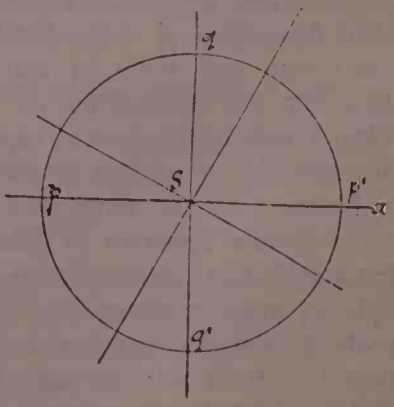


Fig. 536

Dacă considerăm în fig 536., că punctul *s* este punctul unde se reunesc toate razele care au trecut prin cristal în direcţiunea axei optice, atunci linia *sa* reprezintă direcţia vibraţiunei care, eşind din cristal ajunge în *a*. Dacă considerăm o circonferenţă descrisă

în jurul lui s în planul ff', atunci două puncte p şi p' diametral opuse sunt astfeliu în cât dreapta ps este paralelă cu planul de polarizaţie a luminii incidente: pentru aceste puncte avem: $\sin 2\alpha = 0$, deci aparţin unei linii neutre, Dacă considerăm punctele q şi q' diametral opuse şi la 90^0 de cele întâi, şi dacă axa cristalului este normală planului ff', însă îndepărtată de pp', atunci direcţia qs este perpendiculară cu planul de polarizaţie a luminei incidente, şi deci vom ave şi pentru aceste puncte: $\sin 2\alpha = 0$. Ele aparţin deci încă unei linii neutre. Dacă vom considera deci o infinitate de circonferenţe concentrice, având pe s ca centru, pentru fiecare din aceste circonferenţe vor exista puncte corespunzetoare lui p şi p', q şi q' . . . Considerate împreună, ele vor forma două drepte qq' şi pp' perpendiculare între ele şi trecând prin s, dacă axa cristalului e normală planului ff', Aceste două linii formează o cruce.

2) Să considerăm al doilea caz: $\sin 2\beta = 0$. Vom ave pentru aceleaşi consideraţiuni o altă cruce, a cărui centru va corespunde tot cu urma s a axei optice pe planul ff'. Ramurile acestor două cruci fac un unghiu de $\alpha - \beta$, dacă axa optică e normală pe planul ff'.

Dacă $\alpha = \beta$,, adică: dacă secţiunea principală a analizorului este paralelă că direcţiunea de vibraţiune a luminei incidente, atunci cele două cruci se confundă în una singură, care e albă.

Dacă: $\alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2}$ şi prin urmare: $\sin 2\alpha = -\sin 2\beta$, adică dacă secţiunea principală a analizorului este perpendiculară pe direcţia de vibraţiune a luminei incidente, vom ave încă cele două cruci confundate în una singură, dar crucea va fi neagră.

Liniile izocromatice. Pentru a explica forma curbelor izocromatice în cristalele uniaxe observăm că: dacă punctul s reprezintă punctul în care axa optică a cristalului străbate planul ff' este evident că: dacă operăm în lumina monocromatică, şi *dacă secţiunea principală a analizorului este perpendiculară pe planul de vibraţiune a luminei incidente,* adică: $\alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2}$ relaţiunea (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau$$

Atunci, pentru razele cari au ieşit în s, τ este nul şi deci şi I' este nul. Deci în punctul s va fi întunerec. Dacă ne îndepărtăm de s valoarea lui τ creşte, si pentru valori a lui τ ce nu trec

de câteva unităţi, liniile izocromatice sunt curbe închise în jurul lui *s*, şi în particular pentru cristalele uniaxe, ele sunt cercuri concentrice în jurul lui *s*. Dacă considerăm atunci formula care ne dă valorile lui τ, vedem că, diametrul inelelor este proporţional cu unghiul ce face raza considerată cu axa, şi că aceste inele sunt cu atât mai strânse, cu cât sunt mai departate de centru. Vom ave deci, în jurul punctului *s* curbe alternativ strălucitoare şi obscure: curbele obscure corespund pentru; $\tau = \frac{2k+1}{2}$, k fiind un număr întreg.

Dacă operăm în lumina albă, vom ave acelaş fenomen, cu această diferenţă că, în loc să avem cercuri alternativ luminoase şi obscure, colorate uniform, vom ave cercuri colorate cu culorile spectrului, a căror succesiune este dată de scara cromatică a lui Newton, culorile slăbind repede, când ne depărtăm de centru.

Dacă secţiunea principală a analizorului este paralelă cu planul de vibraţiune a luminei incidente: atunci avem: $\alpha = \beta$ şi deci:

$$\frac{I'}{I} = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Atunci curbele obscure sunt negre şi ocupă locul celor luminoase şi viceversa. In acelaş timp se observă că, curbele obscure sunt negre numai în punctele planului *ff'* pentru care avem;

$$\sin^2 2\alpha = 1.$$

şi lumina creşte când ne apropiem de liniele neutre.

b) **Cristale biaxe.** *Linii neutre.* Ne raportăm la formula generală ce am întrebuinţat pentru studiul cristalelor uniaxe.

Pentru a ave liniile neutre, trebue să considerăm $\sin^2 2\alpha = 0$ Pentru a defini valoarea lui α, vom admite ca şi în cazul precedent că, pentru o rază care iesă în punctul *s* al planului *ff* una din cele două direcţiuni de vibraţiune în cristal, este conţinută în planul bisector a diedrului format de planurile care trec prin direcţiunea razei şi prin una din axele optice; atunci putem considera că α este unghiul format de unul din cele două planuri bisectoare cu planul de vibraţiune a luminei incidente. Fie P acest plan. Dacă în planul focal *ff'* punctul *s* descrie o circonferinţă în jurul lui *a* ca centru, atunci linia *as* descrie un unghiu de 360°, pe când planul bisector P nu descrie de cât un unghiu de 180°. Deci, nu există de cât o singură poziţiune a lui *s* pe care o însemnăm cu *s*, pentru care planul P este

paralel cu planul de vibraţiune a luminei incidente, pentru care avem: $\alpha=0$ şi o singură poziţiune s_2 pentru care planul este perpendicular pe planul de vibraţiune a luminei incidente, adecă avem: $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Deci, pe o circonferenţă descrisă în jurul lui a ca centru, nu există de cât două puncte s, şi s_2 care aparţin liniei neutre definită prin: $\sin 2\alpha=0$. Deci dacă considerăm toate circonferenţele descrise în jurul lui a ca centru, şi reunim toate punctele neutre prin o linie, această linie va trece prin a extremitatea axei optice.

De asemenea pentru $\sin 2\beta=0$ vom ave o altă linie neutră ce va trece prin a.

Cele două linii neutre formează un unghiu $\alpha-\beta$, când axa optică e perpendiculară pe planul ff', sau în general acest unghiu se anulează împreună cu $(\alpha-\beta)$.

Când secţiunea principală a analizorului este paralelă cu planul de vibraţiune a luminei incidente, avem: $\alpha=\beta$; atunci cele două linii neutre se confundă în una singură, care e albă.

Dacă secţiunea principală a analizorului este perpendiculară pe planul de vibraţiune a liniei incidente, atunci avem:

$$\alpha=\beta+\frac{\pi}{2} \text{ şi deci: } \sin 2\alpha=-\sin 2\beta.$$

Atunci cele două linii neutre se confundă în una singură care este neagră.

Pentru cazul când nu e de cât o singură linie neutră, liniele izocromatice nu schimbă de culoare, când ele traversază linia neutră; ele trec la culoarea complimentară când sunt două linii neutre deosebite.

Linii izocromatice. In cristalele biaxe considerăm extremităţile a şi a_1 a axelor optice, şi dacă operăm în lumină monocromatică, şi dacă $\alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$ avem ca şi la cristalele uniaxe:

$$\frac{I'}{I}=\sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Atunci în a şi a_1 avem negru; deci dacă valorile lui τ nu trec de câteva unităţi, curbele izocromatice în jurul lui a şi a_1 sunt curbe închise; dar pentru valori mai mari a lui τ, curbele izocromatice sunt curbe închise în jurul celor două axe a şi a_1, şi sunt alternativ obscure şi luminoase. Dacă $\alpha=\beta$, curbele obscure iau locul celor luminoase şi vice versa, şi atunci

$$\frac{I'}{I}=1-\sin^2 2\alpha \sin^2 \pi\tau.$$

Şi vom ave, ca şi la cristalele uniaxe, curbele obscure fiind negre numai în punctele pentru care avem: $\sin^2 2\alpha = 1$. Lumina este cu atât mai tare pe liniele obscure, cu cât $\sin^2 2\alpha$ este mai aproape de zero, adică cu cât ne apropiem mai mult de liniele neutre.

Dacă secţiunea principală a analizorului face un unghiu oare care cu planul de vibraţiune a luminei incidente, liniele izocromatice păstrează aceiaş poziţiune.

Luând în considerare valoarea lui τ, vedem că, curbele izocromatice vor fi cu atât mai îndepărtate, cu cât lungimea de undă a luminei în care operăm este mai mare. Dacă operăm în lumina albă, vom ave în jurul extremităţilor a şi a_1 curbe colorate, care nu sunt izocromatice şi care dau cele mai de multe ori naştere fenomenului numit: *dispersiunea axelor*. Acest fenomen e datorit la două cauze: 1° că unghiurile axelor corespunzătoare diverselor radiaţiuni nu sunt egale; şi 2° fiind că planurile axelor pentru aceste radiaţiuni, nu sunt aceleaşi. Pentru a explica acest din urmă caz, să luăm un exemplu.

Ştim că, prizma ortorombică are trei axe de simetrie binară şi că cele trei axe ale elipsoidului trebue să coincidă cu cele trei axe de simetrie pentru ori care radiaţiune. Insă, fiind că planul axelor optice trece totdeauna prin axele de elasticitate mare şi mică, este evident că acest plan va fi totdeauna un plan de simetrie; şi fiind că sunt trei de aceste planuri care corespund cu bazi-brahi sau macropinacoid, se poate ca, pentru o radiaţiune, planul axelor optice să coincidă cu unul din pinacoizi, şi pentru altă radiaţiune să coincidă cu alt pinacoid. Deci: pentru a examina acest fenomen în cristalii aparţinând sistemului ortorombic, vom lua secţiuni paralele cu cei trei pinacoizi şi se poate ca: planul axelor să fie acelaş pentru toate radiaţiunele, sau ca, pentru unele radiaţii axele optice să fie într'un plan şi pentru cele-l-alte în planul perpendicular acelui ce conţine axele celor întâi radiaţii.

Să studiem diversele cazuri ce se pot prezenta;

Dispersiunea axelor. Considerăm mai întâi cazul cel mai simplu, acel în care axele optice a diverselor vibraţiuni, sunt conţinute în acelaş plan. Fiind că unghiul axelor optice variază pentru diversele vibraţiuni se întâmplă că, în unele cazuri unghiul axelor roşii e mai mare de cât a axelor violete, ceia ce se exprimă scriind: $\rho > v$ sau $\rho < v$. In primul caz, axele roşii ocupă poziţiile R şi R' mai îndepărtate de centrul O, iar cele violete ocupă poziţiile V şi V' mai apropiate. Atunci inelele obs-

cure ale roşului şi violetului ocupă poziţiunile r r′, r, r′, şi v v′, v, v′,. Fiind că operăm în lumină albă, dispariţia roşului va da albastru, iar dispariţia violetului va da roş. Deci, în v′ va fi roş, iar în r′ albastru, aşa că, inelele colorate în jurul axelor optice vor fi albastre în interior şi roşii la exterior. Acest fenomen se numeşte: *dispersiunea axelor.*

Dacă planul axelor variază, vom ave figuri complexe. Să presupunem că, pentru o substanţă, axele roşului sunt mai îndepărtate de cât a galbenului, însă conţinute în planul axelor optice. (Fig. 537). Fiind că unghiul axelor scade cu cât ne apropiem de O, vine un moment când el este zero,— şi atunci el devine perpendicular pe planul axelor optice precedent; căpătăm astfeliu punctele V şi V′. Acest fenomen se observă numai la cristalii din sistemul ortorombic.

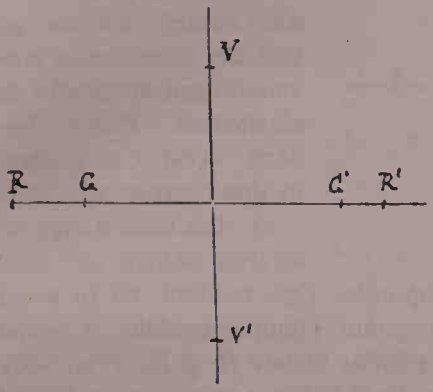


Fig. 537

Dispersiunea bisectriţelor. Acest fenomen se observă la cristalele din sistemul monoclinic. Aici nu avem de cât o singură axă binară: ortodiagonala, care e normală la planul clinopinacoidului. In acest caz, o singură axă a elipsoidului coincide cu această axă binară şi atunci celelalte două rămânând perpendiculare pe cea dintăi, trebue să se găsească în planul clinopinacoidului, unde ocupă diverse poziţiuni.

1). Cazul cel mai simplu este acela când: *axa binară coincide pentru toate radiaţiunile cu axa de elasticitate medie.* In acest caz, axele optice relative la toate radiaţiunile sunt conţinute în planul clinopinacoidului şi au poziţiuni speciale aşa că bisectriţele lor sunt diferite. Fie *Or* şi *Op* bisectriţele corespunzătoare radiaţiunelor roşii şi violete. (Fig. 538). Avem astfeliu fenomenul dispersiunei bisectriţelor. Este evident că, în acest caz, pentru a observa bine fenomenele, va trebui să tăem o secţiune perpendiculară pe bisectriţa ascuţită medie. In tot cazul ea este normală clinopinacoidului şi se găseşte în zona bazi şi ortopinacoidului, putând fi: bazi, ortopinacoidul său o faţă de ortodomă.

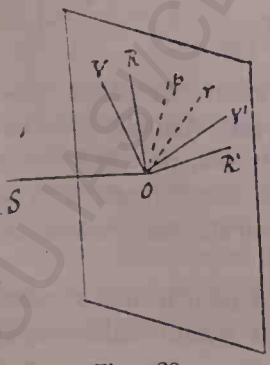


Fig. 538

În acest caz urmele bisectriţelor pentru roş şi violet fiind *Br* şi *Bv*, axele pentru acele culori vor fi V şi V' şi R şi R' şi prin urmare V' R' va fi mai larg de cât VR. (Fig. 539). Acest fenomen de dispersiune şi a axelor şi a bisectriţelor, a primit de la Descloizeaux numele de: *dispersiune inclinată.*

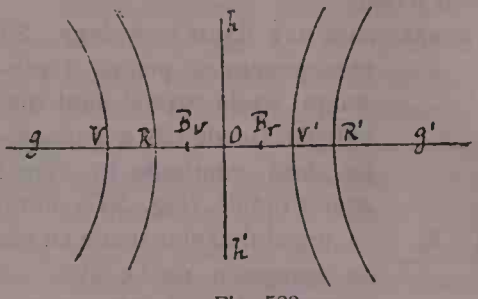


Fig. 539

2) Cazul cel mai general este acel în care: *axa binară coincide cu una din direcţiunile maximului sau minimului de elasticitate.* Putem împărţi acest caz general în două cazuri speciale:

a). *Axa binară este bisectriţa obtuză sau normala optică, pentru toate radiaţiunile.* Este evident că în acest caz bisectriţele ascuţite sunt în panul clinopinacoidului şi ocupă poziţiuni diferite pentru razele roşii şi violete *Br* şi *Bv.* (Fig. 540). Atunci planul axelor roşii este *Br OA* şi a axelor violete *Bv OA* şi se tae după axa binară OA. In acest caz, OR şi OR' precum şi OV şi OV' sunt dispuse simetric în raport cu planul clinopinacoidului. Vom alege dar o secţiune normală pe bisectriţa medie între *Br* şi *Bv*, secţiune care va fi cuprinsă în zona bazi cu ortopinacoidul. Dacă deci, avem în B urma bisectriţei medii şi PP' urma planului corespunzător, atunci VV' va reprezenta urma planului axelor violete şi RR' a axelor roşii trecând prin *Bv* şi *Br*, paralel cu PP', şi fiindcă dispersiunea axelor perzistă vom ave: VV' > RR'. In acest caz există simetrie în raport cu *gg'* însă nu în raport cu *pp'*. Astfeliu vom ave la exteriorul hiperbolelor, roş sus şi albastru jos, pe când la interior roşul va fi jos şi albastrul sus; fiindcă dispersiunea e în raport cu axa orizontală, fenomenul se numeşte *dispersiune orizontală.*

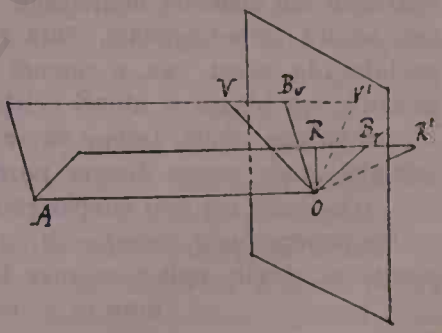


Fig. 540

b). *Axa binară este bisectriţa ascuţită pentru toate radiaţiunile.* In acest caz, normala optică este în planul clinopinacoi-

dului şi ocupă o poziţiune oare-care şi atunci bisectriţele obtuze sunt împrăştiete. Atunci planurile axelor optice fiind perpendiculare pe planul clinopinacoidului, se tae după bisectriţă, care este axa binară, şi pentru a ave o secţiune perpendiculară pe bisectriţa medie, va trebui să o facem paralelă cu planul clinopinacoidului. Dacă considerăm planul clinopinacoidului ca plan al secţiunei, (Fig. 541) atunci planurile RR' şi VV , care conţin axele optice trec prin AO şi urmele lor pe secţiune sunt dispuse radial în jurul lui O; şi fiindcă tot există dispersiunea axelor, RR' este diferit de VV'. Atunci totul e simetric în jurul lui O şi în raport cu O. Insă dacă admitem planurile SS' şi S, S', care reprezintă secţiunile principale ale polarizorului şi a analizorului, atunci figura nu mai este simetrică nici relativ la aceste linii, nici la ori ce altă linie trecând prin O. Acest feliu de dispersiune a fost numit: *dispersiune încrucişată.*

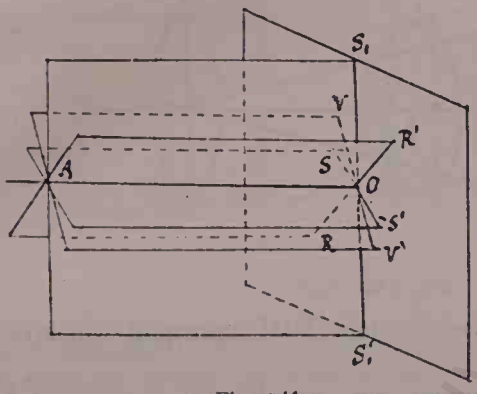


Fig. 541

PARTEA II-a

Aparate şi mijloace de observaţie a fenomenelor de polarizaţie

CAP. XI

Microscop polarizator

Unul din principalele instrumente întrebuinţate pentru studiul fenomenelor optice, mai ales la cristalele ce intră în compoziţia rocelor, este fără îndoială *Microscopul polarizator.* Acest microscop necesitează o descripţie mai detailată, mai ales în compoziţia sa, precum şi întrebuinţarea diverselor părţi accesorii, care servesc pentru studiarea numeroaselor proprietăţi ale cristalelor, proprietăţi pe care le-am studiat în cele precedente din punct de vedere teoretic.

Microscopul polarizator este un microscop propriu zis, la care se adaptează un polarizor şi un analizor, şi apoi diversele dispozitive pentru examinarea proprietăţilor optice în lumina polarizată paralelă sau convergentă, şi pentru a determina diversele constante optice a mineralelor.

Pentru a şti cum să ne servim de un asemenea instrument

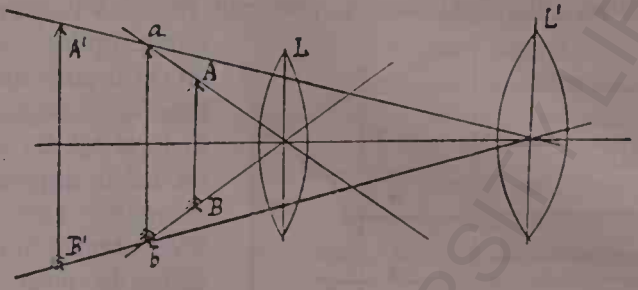


Fig. 542

este nevoe de a aduce aminte mai întâi principiul construcţiei sale.

Un microscop se compune din: un objectiv şi un ocular; objectivul dă o imagină reală şi mărită a obiectului, pe când ocularа serveşte a observa această imagină şi la rândul ei, dă o imagină virtuală şi mărită.

Se construesc mai multe tipuri de oculare: Principalele sunt:

Oculara pozitivă a lui Ramsden. (Fig. 542). Se compune din două lentile L şi L'; cea dintâi numită *frontală* are focarul în *f* şi este pusă astfeliu încât imagina reală AB ce voim a examina, să fie cuprinsă între această lentilă şi focarul ei. A doua lentilă este situată astfeliu încât imagina dată de prima lentilă să cadă între ea şi focarul ei. Aşa dar prima lentilă dă imagina *ab* a lui AB; această imagină *ab* căzând între lentila L' ş focarul său, dă imagina A'B'. In practică se iau distanţele focale *f* şi *f'* egale; atunci distanţa între cele două lentile este $\frac{2}{3}$f.

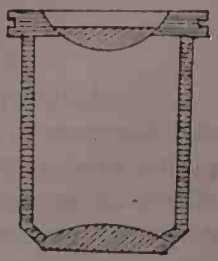


Fig. 543

şi puterea de mărire este dată de formula:

$$M = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\delta}{f},$$

în care δ este distanţa minimă a vederei clare. Pentru a se reduce cât mai mult aberaţiunele cromatice şi de sfericitate, se pun cele două lentile cu convexitatea în faţă. (Fig. 543).

Oculara negativă a lui Huygens. (Fig. 544). Se compune din două lentile L şi L' însă care sunt dispuse astfeliu în cât imagina AB pe care voim să o obţinem şi să o observăm, să se formeze între lentile. Insă această imagină întâlnind lentila L, va da o imagină în A' B' pe care o vom vede mărită prin

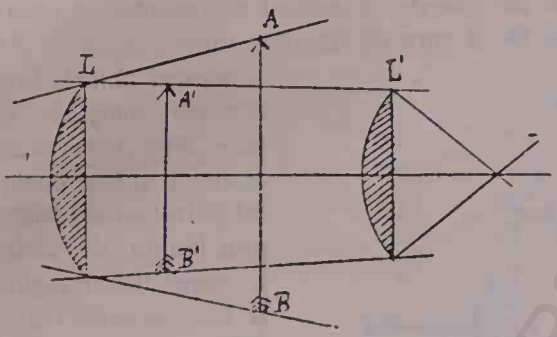


Fig. 544

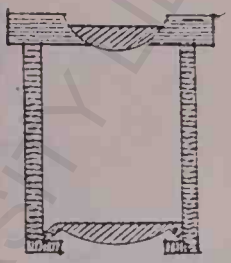


Fig. 545

L în AB. Lentilele ce se întrebuinţează sunt planconvexe şi înturnate cu convexitatea către lumină pentru a micşora aberaţiunea. Puterea de mărire va fi dată prin formula:

$$M = \frac{1}{3} + \frac{2\,\delta}{f.}$$

Lentila L se chiamă *lentilă de câmp*, şi serveşte a mări câmpul vizual, din care cauză acest ocular are un câmp vizual mai mare de cât oculara pozitivă. In microscoape se întrebuinţează totdeauna oculare negative. (Fig. 545).

Obiectivele trebue să fie: *aplanatice* adică să dee o imagină perfectă, şi *acromatice* adică să fie corijate de aberaţiunea de refrangibilitate. Pentru a ajunge la acest rezultat, obiectivele sunt compuse din mai multe lentile. De ordinar se ia o lentilă convergentă de crown, care se asociază cu una de flint, aşa că deviaţia totală pentru anumite culori este aceiaşi, aşa dar ele vor ave un focar comun. (Fig. 546).

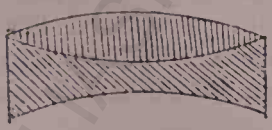


Fig. 546

Fiecare obiectiv este caracterizat prin distanţa sa focală F, şi deschiderea numerică V, a cărei valoare este dată prin formulele:

$$V = \sin u \text{ şi } V = n \sin u$$

în care n reprezintă indicele licidului de imersiune, iar u jumătate din unghiul de deschidere a sistemului.

— Să considerăm acum un microscop având un objectiv şi un

ocular negativ, şi să vedem care este mersul razelor trimise de oglindă în direcţiunea axei. (Fig. 547).

Oglinda MM' trimite în axa aparatului lumină difuză care străbate: mai întâi un condensator reprezentat prin lentila *C* şi care concentrează lumina asupra obiectului *ab*. In faţa obiectului astfeliu iluminat se găseşte objectivul reprezentat în figură prin o singură lentilă O, şi care dă imagina mărită şi reală AB a acestui obiect. Insă această imagină se face între cele două lentile L şi L' a ocularei şi trebue să treacă prin lentila de câmp L care dă imagina A' B'. Această imagină se găseşte în faţa lentilei L', care dă o imagină virtuală mărită A'' B'' la distanţa minimum a vederei clare. De ordinar se limitează câmpul vederei prin o diafragmă circulară *e e'* pusă îndărăptul lentilelor objectivului, şi pentru a ave un câmp net şi clar se pune o altă diafragmă *d d'* în planul A' B' unde se formează imagina după ce a trecut lentila de câmp.

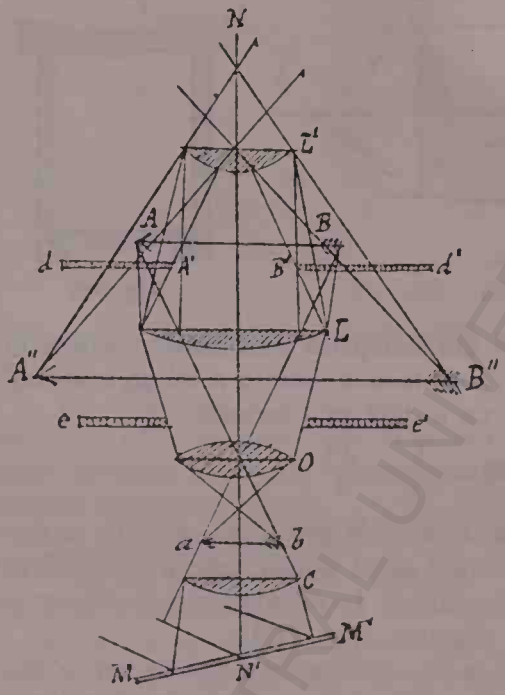


Fig. 547

Se ştie că microscopul e compus din un tub cilindric ce are de ordinar lungimea de 160 mm. iar la extremităţile lui se găsesc fixate: sus oculara şi jos obiectivul. Tubul e fixat pe un suport şi poate primi mişcări mai mult sau mai puţin lente cu ajutorul unei cremaliere şi a unui şurub fără sfârşit; pentru mişcările mici, ce servesc la punerea la punct a imaginei, ne servim de un şurub micrometric.

— De multe ori se cere a determina puterea de mărire a microscopului, adică raportul între mărimea imaginei şi a obiec-

tului. In teorie se defineşte astfeliu puterea de mărire a microscopului: raportul unghiurilor α si α' sub care se vede la distanţa

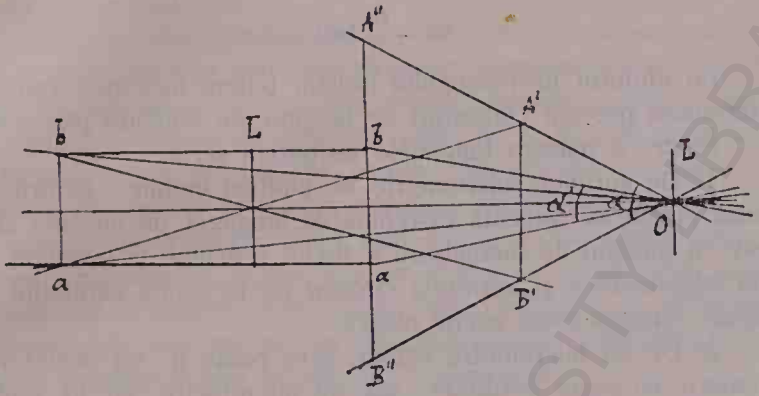


Fig. 548

minimum a vederei clare, imagina A" B" şi obiectul *a b*: (Fig: 548).

$$G = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{A'' B''}{a b} = \frac{A'' B''}{A B} \cdot \frac{A B}{a b}$$

Insă $\frac{A'' B''}{A B}$ reprezintă puterea de mărire a ocularei, iar $\frac{A B}{a b}$, acea a obiectivului L. Deci: puterea de mărire totală este productul puterelor de mărire a obiectivului şi a ocularei.

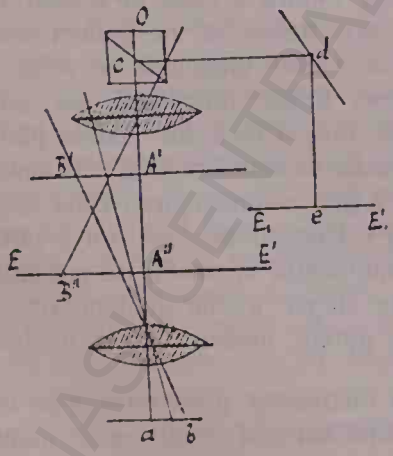


Fig. 549

Pentru a măsura această putere de mărire, trebue să avem la dispoziţie o cameră clară şi un micrometru objectiv. (Fig. 549) Se pune acest micrometru pe platina microscopului în *ab* şi se pune la punct, ceia ce dă imagina A" B". Pe de altă parte prin camera clară, se suprapune acestei imagini mărite A" B", imagina E E' a unei alte scări graduate E, E,', care se găseşte pusă pe o masă la o distanţă aşa ca să fie: Oc+cd+de=OA". Pentru a ajunge la acest rezultat, masa pe care se găseşte E, E,' se poate sui sau scoborâ după voinţă.

Pentru a calcula această putere de mărire, se observă nu-

mărul n de diviziuni a micrometrului $\left(\frac{1}{100}\right)$ care corespunde cu m diviziuni a scării (în milimetri). Avem atunci:

$$G = \frac{m}{n} 100.$$

Cu ajutorul microscopului ordinar putem face încă anumite determinări precum: măsurări de lungimi, de unghiuri plane etc.

Pentru a măsura lungimele ne putem servi:

1° De şurubul micrometric al platinei mobile; pentru aceasta facem să coincidă extremităţile lungimei de măsurat succesiv cu punctul de încrucişare a firelor reticului şi evaluăm pe linia micrometrică şi vernierul circular de pe capul şurubului de mişcare, dimensiunele acelui obiect.

2° De un micrometru ocular, care poate fi: un ocular micrometric cu scară graduată, sau un micrometru cu fir mobil. In ambele cazuri. determinăm numărul n de diviziuni interceptat pe scara micrometrică. Aceste reprezintă dimensiunele imaginei, dar nu a obiectului: pentru a ave dimensiunea obiectului, înmulţim pe n cu o constantă K pe care o determinăm în raport cu sistemul optic întrebuinţat, adică pentru anumite combinaţii de obiectiv şi ocular.

Măsura unghiurilor plane. Această operaţie se face mai ales, când voim a determina valoarea unghiurilor ce fac două feţe în o secţiune a unui cristal, care e paralelă cu planul normal al diedrului ce voim a măsura. Pentru aceasta ne servim de platina mobilă a microscopului, care trebue să fie perfect centrată. Aşezăm cristalul astfeliu ca, vârful unghiului ce voim a măsura să coincidă cu încrucişarea firelor reticulului, iar una din laturile unghiului cu unul din fire, şi învârtim platina până ce a doua latură a unghiului coincide cu al doilea fir al reticulului (pentru unghiuri mai mici de 90°) şau cu prelungirea celui întâi (pentru unghiuri mai mari de 90°). Unghiul de care s'a învârtit platina este complimentul sau suplimentul unghiului de măsurat.

Sunt unele microscoape care au un ocular goniometric cu reticul mobil, cu ajutorul căruia putem măsura direct unghiul cristalului.

Microscopul polarizator. Un microscop polarizator este un microscop ordinar, căruia se adaptează doi nicoli: unul numit *polarizor* aşezat sub platina microscopului şi deci sub preparaţie şi sub obiectiv, iar al doilea numit *analizor*, aşezat între obiectiv şi ocular sau deasupra ocularului. Pentru a se putea măsura unghiurile cristalelor sau unghiurile de extincţiune, platina aces-

tor microscoape este turnantă şi graduată pe margină, mobilă în faţa unui vernier, care ne permite a determina unghiurile în grade şi fracţiuni.

In ce priveşte partea optică, ea poate fi dispusă aşa ca, în cazurile cele mai generale să putem face observaţia în lumină naturală, sau dacă întrebuinţăm lumina polarizată, atunci razele de lumină polarizată ce iesă din polarizor şi străbat preparaţia, să fie sub formă de fascicol paralel. Se zice că, în acest caz observaţiele se fac *în lumina paralelă*, iar microscopului se mai dă numele de *ortoscop*. Când însă avem a face observaţiele în *lumină convergentă*, atunci, sau ne servim de un ortoscop, căruia introducem o lentilă convergentă între polarizor şi preparaţia microscopică, sau ne servim de microscoape construite anume pentru aceasta şi cari se numesc *conoscoape*.

— Pentru a studia preparaţiele microscopice de roci în lumină polarizată, ne servim în general de micrescoape polarizatoare, care trebue să întrunească reunîte toate dispozitivele, de care se cere să facem uz, fie în lumină paralelă fie în lumină convergentă. Pe lângă aceasta, microscopul trebue să fie centrat, adică să permită de a aşeza un punct al obiectului ce voim a studia, aşa ca să coincidă cu încrucişarea firelor reticului, oricare ar fi poziţiunea obiectului, când învârtim platina pe care e aşezat. Fiind că nu se pot construi microscoape în care să existe coincidenţă perfectă a axei de rotaţie a platinei, cu axa optică a microscopului, de aceia se utilizează diverse dispozitive pentru a obţine această coincidenţă, iar operaţiunea se numeşte *centrare*. In unele microscoape precum acele a lui *Nachet*, sau cele fabricate de *Societé Genevoise* sau de firma *Fuess*, numite cu *centrare permanentă*, obiectivul este legat cu platina aşa că, se mişcă odată cu ea, pe când tubul care poartă oculara, şi analizorul se mişcă independent de obiectiv. In toate cel-l-alte microscoape numite cu *centrare facultativă*, putem face uz de două şuruburi, care sunt adaptate, sau la platină sau la suportul obiectivului şi care se mişcă în direcţii perpendiculare una pe alta care sunt paralele cu firele reticulului, In acest caz, dacă constatăm că microscopul este descentrat, trebue să determinăm mai întâi, care e poziţia noului centru de rotaţie, şi care e reprezentat prin un punct al preparaţiei care, în cursul unei învârtituri complecte a platinei, nu-şi schimbă poziţia; fie *c* acel centru. (Fig. 550), Pentru a-l face să coincidă cu încrucişarea firelor reticulului e de ajuns de a mişca şurubul din dreapta.

până ce punctul c atinge firul vertical al reticulului în punctul c'; atunci mişcând şurubul de sus, aducem punctul c în coincidenţă cu încrucişarea firelor reticulului; atunci microscopul este centrat.

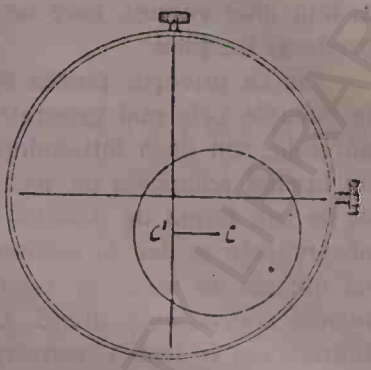


Fig. 550

De ordinar nicolul polarizor e fix şi în legătură cu condensatorul, care, cu ajutorul unui şurub cu angrenaj, se poate sui sau scoborâ, adică apropia sau depărta de preparaţie, pe când nicolul analizor este fixat în tubul microscopic între obiectiv şi ocular, însă aşezat într'un suport mobil, care permite să-l scoatem sau să-l introducem în mersul razelor ce au trecut prin obiectiv, înainte de a intra în ocular. Secţiunele principale ale nicolilor sunt dispuse perpendicular una pe alta (nicoli în cruce) şi coincid cu direcţiunele celor două fire ale reticulului.

— Să vedem acuma cum vom pute studia diversele fenomene ce prezintă cristalii, fie în lumină paralelă, fie în lumină convergentă.

Ne vom ocupa mai întâi de fenomenele cunoscute sub numele de *extincţiune* pe care le observăm în lumina paralelă. Ştim că în general o substanţă birefringentă introdusă între nicolii în cruce, restabileşte lumina; există însă 4 poziţiuni pentru care restabilirea luminei nu are loc, şi aceasta pentru cazurile când axele n_g şi n_p sunt paralele cu secţiunele principale ale nicolilor; aceste poziţiuni se numesc: *poziţiuni de extincţiune*. Dacă nicolii sunt paraleli, adică avem lumină în câmpul microscopului, introducerea unei lamele birefringente produce o scădere a intensităţii luminoase: când axele n_g şi n_p sunt paralele cu secţiunele principale, lumina transmisă e maximum. Dacă secţiunea examinată e paralelă cu planul unei secţiuni ciclice, atunci între nicolii în cruce avem totdeauna întunerec, iar între nicolii paraleli, avem continuu lumină, — ori care ar fi poziţiunea lamelei prin învârtirea ei între nicoli.

Când într'o preparaţie microscopică avem o secţiune într'un mineral ce voim a examina de ex. un feldspat, atunci se poate întâmpla ca această secţiune să ne prezinte un conturn determinat, sau numai cât aşa numite *linii directrice*, precum o muche

a două fețe, urmă de clivaj, direcțiunea de lungire a cristalului.

In aceste cazuri direcțiunele de extincțiune ocupă pozițiuni anumite în raport cu liniile ce formează conturul cristalului sau cu liniile directrice, și aceste pozițiuni depind de sistemul cristalin precum și de direcțiunea în care a fost tăetă lamela. Când liniile *ng* și *np* sunt paralele sau așezate simetric în raport cu conturul lamei sau cu liniile directrice, atunci *extincțiunea se zice dreaptă.*

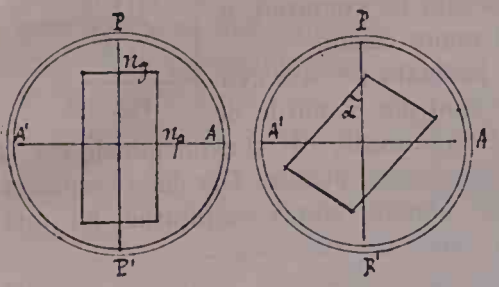


Fig. 551

Când ele ocupă o poziție oarecare atunci *extincțiunea se zice oblică.* (Fig. 551). Când avem dar o lamelă ce prezintă o extencțiune oblică, pentru a fixa pozițiunele liniilor *ng* și *np*, trebuie să determinăm unghiul ce face una din aceste linii de extincțiune cu linia directrice aleasă. Acestui unghiu se dă numele de: *unghiu de extincțiune.* Cu ajutorul microscopului polarizator, măsura acestui unghiu se face știind că, direcțiunile firelor reticulului, corespund cu secțiunele principale ale nicolilor. Pentru aceasta facem să coincidă linia directrice aleasă cu unul din firele reticulului, de ordinar cu acel vertical și întoarcem platina microscopului și prin urmare și preparația ce examinăm, până la extincțiunea complectă. Unghiul de care s'a învârtit platina este unghiul de extincțiune.

La diversele sisteme cristaline extincțiunele se fac astfel:

La *sistemul cubic,* ori care ar fi direcțiunea în care a fost tăiată lamela, ea rămâne totdeauna stânsă.

La *sistemul patratic,* avem un elipsoid de revoluțiune în jurul axei principale, care e și axa optică. Putem presupune cazurile următoare:

1° *Secțiunea e paralelă cu baza.* In acest caz ea fiind perpendiculară pe axa optică, coincide cu o secțiune ciclică a elipsoidului, și deci va fi totdeauna stânsă între nicolii în cruce. Dacă secțiunee prezintă un contur regulat, el nu poate fi decât un patrat sau un octogon (Fig. 552).

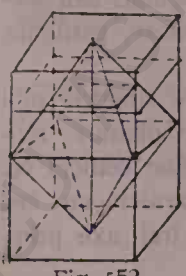


Fig. 552

2° *Secțiunea e paralelă cu axa principală.* Ori care va fi arientarea acestei secțiuni în jurul axei, ea e perpendiculară pe o secțiune principală și va prezenta deci patru extincțiuni

drepte în raport cu axa. (Fig. 553). Forma secţiunelor poate fi: sau dreptunghiulară (solid prizmatic), rombică (solid paramidal) sau hexagonal lungit (solid combinat).

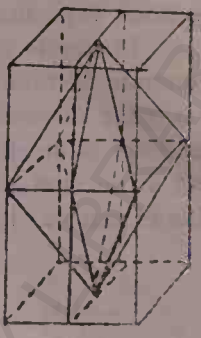


Fig. 553

3° *Secţiunea are o direcţiune oare care.* Dacă raportăm aceste secţiuni la proiecţia axei principale, atunci şi extincţiunile la acea projecţie vor fi drepte: dacă le raportăm la contururi atunci se pot întâmpla mai multe cazuri:

1° Dacă secţiunea e înclinată pe axa cvaternară însă normală la unul din planurile de simetrie binară, atunci, atât contururile cât şi extincţiunele vor fi simetrice în raport cu urmele acestor planuri. Dar dacă secţiunea e oblică în raport cu aceste planuri, atunci contururile nu mai sunt simetrice, în raport cu liniile de extincţiune.

La *sistemele hexagonal şi romboedric*, secţiunele paralele cu axa vor fi dreptunghiulare sau rombice şi se vor stânge paralel cu urma axei ca şi la sistemul patratic. (Fig. 554). Secţiu-

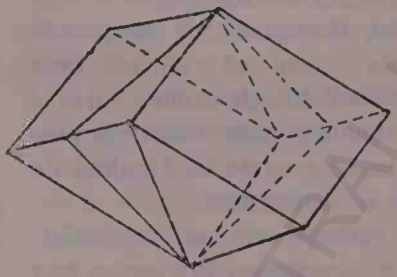


Fig. 554

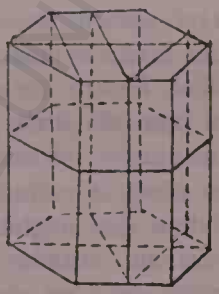


Fig. 555

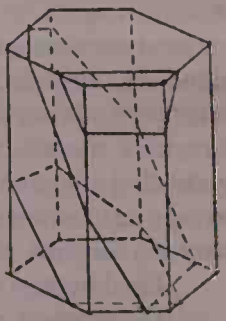


Fig. 556

nile paralele cu baza vor fi: triunghiuri, hexagoane sau dodecagoane şi vor fi totdeauna stânse. Iar când secţiunile sunt oblice faţă cu axa, putem ave secţiuni hexagonale lungite sau dreptunghiuri.

Secţiunele după zona *m p*, sunt: sau drepunghiuri sau hexagoane simetrice faţă cu două axe dreptunghiulare, extincţia făcându-se după axă. (Fig. 555—556).

La sistemul Ortorombic avem trei planuri de simetrie paralele cu cei trei pinacoizi, *p*, *h'* şi *g*. Aceste trei planuri trebue să cuprindă axele optice iar axele cristalografice coincid cu axele de elasticitate a elipsoidului. Secţiunele paralele cu cei trei pinacoizi sunt perpendiculare pe una din cele trei axe prin-

cipale şi pe două din planurile de simetrie a elipsoidului, din care cauză au extincţiunea dreaptă. Unul din pinacoizi e perpendicular pe bisectriţa ascuţită a axelor optice, un altul pe bisectriţa obtuză, iar al treilea pe axa medie n_m. (Fig. 557, 558).

Secţiunele paralele cu zonele principale *ph'*, *pg' h'g'* în care axa de zonă e perpendiculară pe un plan principal al elipsoidului, au extincţiunele în raport cu aceste axe, totdeauna drepte, Contururile diferitelor feţe a zonei, vor fi dispuse simetric numai în raport cu una din liniele de extincţiune. Una din cele trei zone principale conţine secţiunele normale la axele optice, care vor fi, după cum se ştie, stânse.

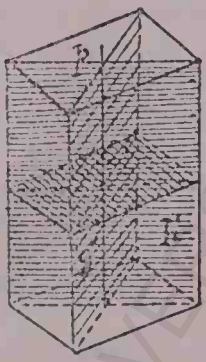


Fig. 557

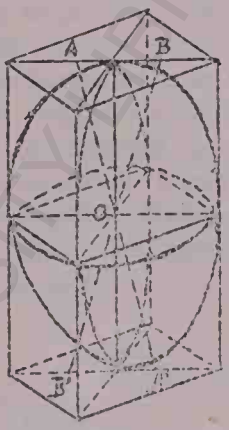


Fig. 558

In ce priveşte secţiunele oarecari, ele nu vor ave extincţiuni simetrice în raport cu conturnul.

La sistemul monoclinic nu există de cât un singur plan de simetrie, care trece prin axa principală şi clinodiagonala şi e perpendicular pe ortodiagonală; acest plan conţine şi axele optice; însă axele de elasticitate nu mai corespund cu axele cristalografice. Dacă axele optice sunt cuprinse în planul ce trece prin clinodiagonală, este evident că secţiunele din zona *ph'* apar continuu stânse şi sunt simetrice în raport cu două axe. Dacă axele optice sunt în planul ce trece prin ortodiagonală, atunci secţiunele stânse nu mai sunt simetrice. Secţiunele paralele cu zona *ph'* sunt simetrice atât în raport cu urma planului *g'*, cât şi a lui *h'*, şi se stâng după aceste direcţiuni.

Cele-l-alte secţiuni simetrice nu se stâng după axa lor de figură, iar unghiurile de extincţiune trebuesc studiate pentru fiecare caz în particular.

La sistemul triclinic nu mai găsim nici o relaţie fixă între poziţiunele axelor cristalografice de o parte, şi acele de elasticitate optică de altă parte. De aceia se studiază fiecare caz în particular.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CAP. IV

Transformarea notaţiunelor cristalografice.

Am văzut în descrierea diverselor sisteme cristaline, cum se obţin notaţiunele formelor cristaline după cele 4 sisteme de notaţiune; fiind însă că nu avem în totdeauna timpul de a căuta transformarea acestor notaţiuni una din alta, este mai comod a ave la îndămână un tablou, în care să avem aceste transformări făcute, fie prin formule generale, fie prin cazuri speciale de forme, care se găsesc mai frecvent. In cele ce urmează găsim un asemenea tablou, în care s'au trecut principalele forme cristaline pe care le întâlnim în Mineralogia descriptivă. Notaţiunele urmează în ordinea: *Levy*, *Naumann*, şi *Miller*, iar sistemele hexagonal şi romboedric ei notaţia după *Bravais*.

Sistemul Cubic.

Cub	p	$\infty 0 \infty$	(100)
Octaedru	a'	0	(111)
Dodecaedru romboidal	b'	$\infty 0$	(110)
Trioctaedre	$a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{w}{u}}$	$m0$	$(u\,u\,w)\,m = \frac{u}{w}$
	$a^{\frac{1}{2}}$	20	(221)
	$a^{\frac{1}{3}}$	30	(331)
	$a^{\frac{1}{4}}$	40	(441)
	$a^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{2}0$	(332)
	$a^{\frac{3}{4}}$	$\frac{4}{3}0$	(443)
	$a^{\frac{4}{5}}$	$\frac{5}{4}0$	(554)
Trapezoedre	$a^{\frac{m}{1}} = a^{\frac{u}{w}}$	$m0m$	$(u\,w\,w)\,m = \frac{u}{w}$
	$a^{\frac{2}{1}}$	202	(211)
	$a^{\frac{3}{1}}$	303	(311)
	$a^{\frac{4}{1}}$	404	(411)
	$a^{\frac{8}{1}}$	808	(811)
	$a^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}0\frac{3}{2}$	(322)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Trapezoedre	$a^{\frac{4}{3}}$	$\frac{4}{3}0\frac{4}{3}$	(433)
	$a^{\frac{5}{2}}$	$\frac{5}{2}0\frac{5}{2}$	(522)
	$a^{\frac{5}{3}}$	$\frac{5}{3}0\frac{5}{3}$	(533)
	$a^{\frac{5}{4}}$	$\frac{5}{4}0\frac{5}{4}$	(544)
	$a^{\frac{6}{5}}$	$\frac{6}{5}0\frac{6}{5}$	(655)
	$a^{\frac{7}{2}}$	$\frac{7}{2}0\frac{7}{2}$	(722)
	$a^{\frac{9}{4}}$	$\frac{9}{4}0\frac{9}{4}$	(944)
Tetrahexaedre	$b^{\frac{u}{v}}$	$\infty 0\frac{u}{v}$	$(u\,v\,O)\ u > v$
	b^{2}	$\infty 02$	(210)
	b^{3}	$\infty 03$	(310)
	$b^{\frac{3}{2}}$	$\infty 0\frac{3}{2}$	(3:0)
	$b^{\frac{4}{3}}$	$\infty 0\frac{4}{3}$	(430)
	$b^{\frac{5}{2}}$	$\infty 0\frac{5}{2}$	(520)
	$b^{\frac{5}{3}}$	$\infty 0\frac{5}{3}$	(530)
	$b^{\frac{5}{4}}$	$\infty 0\frac{5}{4}$	(540)
	$b^{\frac{6}{5}}$	$\infty 0\frac{6}{5}$	(650)
Hexoctaedre	$b^{\frac{1}{w}}\,b^{\frac{1}{v}}\,b^{\frac{1}{u}}$	$m0n$	$(u\,v\,w)\ u>v>w$
	$b'\ b^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}}$	$30\frac{3}{2}$	(321) $m = \frac{u}{w}$
	$b'\ b^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{4}}$	402	(421) $n = \frac{u}{v}$
	$b'\ b^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{4}}$	$40\frac{4}{3}$	(431)
	$b'\ b^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{5}}$	$50\frac{5}{3}$	(531)
$b^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{4}} =$	$b'\ b^{\frac{1}{3}}\,b^{2}$	$20\frac{4}{3}$	(432)
	$b^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{2}0\frac{5}{3}$	(532)

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Hexoctaedre	$b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{2}O\frac{5}{4}$	(542)
	$b^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{3}O\frac{5}{4}$	(543)

Sistemul Patratic.

Bazipinacoid	p	$0P$	(001)
Prizma dir.	m	∞P	(110)
Prizma inv.	h'	$\infty P\infty$	(100)
Octaedre pe muchi	$b^{\frac{1}{2m}}$	mP	$(u\,u\,w)$ $m=\frac{u}{w}$
	$b^{\frac{1}{2}}$	P	(111)
	b^{1}	$\frac{1}{2}$P	(112)
	$b^{\frac{1}{3}}$	$\frac{3}{2}$P	(332)
	$b^{\frac{1}{4}}$	2P	(221)
	$b^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3}$P	(113)
	$b^{\frac{1}{6}}$	3P	(331)
	$b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{2}$P	(552)
	b^{2}	$\frac{1}{4}$P	(114)
	b^{5}	$\frac{1}{10}$P	(1.1.10)
	$b^{\frac{1}{8}}$	4P	(441)
	$b^{\frac{1}{10}}$	5P	(551)
	$b^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{4}$P	(334)
	$b^{\frac{3}{4}}$	$\frac{2}{3}$P	(223)
	$b^{\frac{3}{8}}$	$\frac{4}{3}$P	(443)
	$b^{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{5}$P	(115)
	$b^{\frac{5}{4}}$	$\frac{2}{5}$P	(225)
	$b^{\frac{5}{6}}$	$\frac{3}{5}$P	(335)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Octaedre pe muchi	$b^{\frac{7}{2}}$	$\frac{1}{7}$P	(117)
	$b^{\frac{7}{6}}$	$\frac{3}{7}$P	(337)
	$b^{\frac{8}{10}}$	$\frac{5}{8}$P	(558)
	$b^{\frac{9}{10}}$	$\frac{5}{9}$P	(559)
Octaedre pe unghiuri	$a^{\frac{1}{m}}$	mP∞	(u0w) $m=\frac{u}{w}$
	a^{1}	P∞	(101)
	a^{2}	$\frac{1}{2}$P∞	(102)
	a^{3}	$\frac{1}{3}$P∞	(103)
	a^{4}	$\frac{1}{4}$P∞	(104)
	$a^{\frac{1}{2}}$	2P∞	(201)
	$a^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}$P∞	(203)
	$a^{\frac{3}{7}}$	$\frac{7}{3}$P∞	(703)
	$a^{\frac{4}{3}}$	$\frac{3}{4}$P∞	(304)
Prizme Octogone	$h^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P n$	*(u v O)* $n=\frac{u}{v}$
	h^{2}	∞P3	(310)
	h^{3}	∞P2	(210)
	h^{4}	$\infty P\frac{5}{3}$	(530)
	h^{5}	$\infty P\frac{3}{2}$	(320)
	$h^{\frac{3}{2}}$	∞P5	(510)
	$h^{\frac{5}{3}}$	∞P4	(410)
	$h^{\frac{7}{3}}$	$\infty P\frac{5}{2}$	(520)
Dioctaedre	$b^{\frac{1}{u-v}} b^{\frac{1}{u+v}} h^{\frac{1}{w}}$	$m P n$	*(u v w)* $m=\frac{u}{w}$
	$b' b^{\frac{1}{3}} h'=a_3$	2P2	(211) $n=\frac{u}{v}$
	$b' b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$	P2	(212)
	$b' b^{3} h'=a\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$P2	(213)

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dioctaedre	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h'$	$3P3$	(311)
	$b'\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}P2$	(214)
	$b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{5}} h^{\frac{1}{2}}$	$2P4$	(412)
	$b'\ b^{\frac{1}{5}}\ h' = a_5$	$3P\frac{3}{2}$	(321)
	$b'\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{4}P3$	(3.1.12)
	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{3}}$	$P\bar{3}$	(313)
	$b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^{\frac{1}{19}}$	$\frac{5}{19}P5$	(5.1.19)
	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{2}} = a_2$	$\frac{3}{2}P3$	(312)
	$b'\ b^{\frac{1}{5}}\ h^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}P\frac{3}{2}$	(322)

Sistemul Ortorombic

Bazipinacoid	p	$0P$	(001)
Macropinacoid	h'	$\infty P\bar{\infty}$	(100)
Brahipinacoid	g'	$\infty P\breve{\infty}$	(010)
Frizma	m	∞P	(110)
Octaedre	$b^{\frac{1}{2m}}$	mP	$(u\ a\ w)$ $u > < w$
	$b^{\frac{1}{2}}$	P	(111) $m = \frac{u}{w}$
	b^{1}	$\frac{1}{2}P$	(112)
	b^{2}	$\frac{1}{4}P$	(114)
	b^{3}	$\frac{1}{6}P$	(116)
	b^{4}	$\frac{1}{8}P$	(118)
	$b^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3}P$	(113)
	$b^{\frac{3}{4}}$	$\frac{2}{3}P$	(223)
	$b^{\frac{1}{3}}$	$\frac{3}{2}P$	(332)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Octaedre	$b^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{4}P$	(334)
	$b^{\frac{1}{4}}$	$2P$	(221)
	$b^{\frac{1}{6}}$	$3P$	(331)
	$b^{\frac{5}{6}}$	$\frac{3}{5}P$	(335)
	$b^{\frac{1}{8}}$	$4P$	(441)
	$b^{\frac{3}{8}}$	$\frac{4}{3}P$	(443)
	$b^{\frac{5}{8}}$	$\frac{4}{5}P$	(445)
	$b^{\frac{1}{12}}$	$6P$	(661)
	$b^{\frac{1}{18}}$	$9P$	(991)
	$b^{\frac{1}{20}}$	$10P$	(10.10.1)
	$b^{\frac{1}{48}}$	$24P$	(24.24.1)
Macrodome	$a^{\frac{1}{m}}$	$mP\infty$	$(u0w)$ $m = \frac{u}{w}$
	a^{1}	$P\infty$	(101)
	$a^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}P\infty$	(102)
	$a^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}P\infty$	(103)
	$a^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4}P\infty$	(104)
	$a^{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{5}P\infty$	(105)
	$a^{\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{6}P\infty$	(106)
	$a^{\frac{1}{2}}$	$2P\infty$	(201)
	$a^{\frac{1}{3}}$	$3P\infty$	(301)
	$a^{\frac{1}{4}}$	$4P\infty$	(401)
	$a^{\frac{1}{5}}$	$5P\infty$	(501)

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Macrodome	$a^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{2}P\bar{\infty}$	(302)
	$a^{\frac{3}{4}}$	$\frac{4}{3}P\bar{\infty}$	(403)
	$a^{\frac{3}{7}}$	$\frac{7}{3}P\bar{\infty}$	(703)
	$a^{\frac{5}{8}}$	$\frac{8}{5}P\bar{\infty}$	(805)
	$a^{\frac{4}{3}}$	$\frac{3}{4}P\bar{\infty}$	(304)
	$a^{\frac{5}{4}}$	$\frac{4}{5}P\bar{\infty}$	(405)
	$a^{\frac{5}{3}}$	$\frac{3}{5}P\bar{\infty}$	(305)
	$a^{\frac{5}{2}}$	$\frac{2}{5}P\bar{\infty}$	(205)
Brahidome	$e^{\frac{1}{m}}$	$mP\bar{\infty}$	*(0 v w)* $m = \frac{v}{w}$
	e^{1}	$P\bar{\infty}$	(011)
	e^{2}	$\frac{1}{2}P\bar{\infty}$	(012)
	e^{3}	$\frac{1}{3}P\bar{\infty}$	(013)
	e^{4}	$\frac{1}{4}P\bar{\infty}$	(014)
	$e^{\frac{1}{2}}$	$2P\bar{\infty}$	(021)
	$e^{\frac{1}{3}}$	$3P\bar{\infty}$	(031)
	$e^{\frac{1}{4}}$	$4P\bar{\infty}$	(041)
	$e^{\frac{1}{5}}$	$5P\bar{\infty}$	(051)
	$e^{\frac{1}{6}}$	$6P\bar{\infty}$	(061)
	$e^{\frac{1}{9}}$	$9P\bar{\infty}$	(091)
	$e^{\frac{1}{10}}$	$10P\bar{\infty}$	(0.10.1)
	$e^{\frac{1}{20}}$	$20P\bar{\infty}$	(0.20.1)
	$e^{\frac{1}{24}}$	$24P\bar{\infty}$	(0.24.1)

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Brahidome	$e^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{2}P\breve{\infty}$	(032)
	$e^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}P\breve{\infty}$	(023)
	$e^{\frac{3}{4}}$	$\frac{4}{3}P\breve{\infty}$	(043)
	$e^{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{3}P\breve{\infty}$	(053)
	$e^{\frac{4}{3}}$	$\frac{3}{4}P\breve{\infty}$	(034)
	$e^{\frac{4}{5}}$	$\frac{5}{4}P\breve{\infty}$	(054)
	$e^{\frac{5}{2}}$	$\frac{2}{5}P\breve{\infty}$	(025)
	$e^{\frac{4}{27}}$	$\frac{27}{4}P\breve{\infty}$	(0.27.4)
	$e^{\frac{8}{15}}$	$\frac{15}{8}P\breve{\infty}$	(0.15.8)
	$e^{\frac{5}{3}}$	$\frac{3}{5}P\breve{\infty}$	(035)
	$e^{\frac{5}{4}}$	$\frac{4}{5}P\breve{\infty}$	(045)
	$e^{\frac{9}{20}}$	$\frac{20}{9}P\breve{\infty}$	(0.20.9)
Macroprizme	$h^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P\bar{m}$	(uv0) u<v m=$\frac{v}{u}$
	h^{2}	$\infty P\bar{3}$	(130)
	h^{3}	$\infty P\bar{2}$	(120)
	h^{4}	$\infty P\frac{\bar{5}}{3}$	(350)
	h^{5}	$\infty P\frac{\bar{3}}{2}$	(230)
	$h^{\frac{3}{2}}$	$\infty P\bar{5}$	(150)
	$h^{\frac{4}{3}}$	$\infty P\bar{7}$	(170)
	$h^{\frac{5}{2}}$	$\infty P\frac{\bar{7}}{3}$	(370)
	$h^{\frac{5}{3}}$	$\infty P4$	(140)
Brahiprizme	$g^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P\breve{m}$	(uv0) u>v m=$\frac{u}{v}$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Brahiprizme	$g^{\frac{1}{2}}$	$\infty P\bar{3}$	(310)	
	g^{3}	$\infty P\bar{2}$	(210)	
	$g^{\frac{5}{3}}$	$\infty P\frac{\bar{5}}{3}$	(530)	
	g^{5}	$\infty P\frac{\bar{3}}{2}$	(320)	
	g^{11}	$\infty P\frac{\bar{6}}{5}$	(650)	
	$g^{\frac{3}{2}}$	$\infty P\bar{5}$	(510)	
	$g^{\frac{7}{3}}$	$\infty P\bar{7}$	(710)	
	$g^{\frac{5}{2}}$	$\infty P\frac{\bar{7}}{3}$	(730)	
	$g^{\frac{5}{3}}$	$\infty P\bar{4}$	(410)	
	$g^{\frac{5}{4}}$	$\infty P\bar{9}$	(910)	
	$g^{\frac{7}{5}}$	$\infty P\bar{6}$	(610)	
Macropiramide	$b^{\frac{1}{u-v}}\, b^{\frac{1}{u+v}}\, h^{\frac{1}{w}}$	$mP\bar{n}$	*(u v w)*	$u > v$
	$b' b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$	$P\bar{2}$	(212)	$m = \frac{u}{w}$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} h'$	$3P\bar{3}$	(311)	$n = \frac{u}{v}$
	$b' b^{\frac{1}{3}} h' = a_3$	$2P\bar{2}$	(211)	
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{3}}$	$P\bar{3}$	(313)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} h^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}P\frac{\bar{3}}{2}$	(322)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{9}} h'$	$6P\bar{2}$	(631)	
	$b' b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}} = a_{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}P\bar{2}$	(213)	
	$b' b^{\frac{1}{2}} h' = a_2$	$\frac{3}{2}P\bar{3}$	(312)	
	$b' b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}P\bar{2}$	(214)	
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{4}} = a_{\frac{1}{4}}$	$\frac{3}{4}P\bar{3}$	(314)	

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Macropiramide	$b' b^{\frac{1}{5}} h' = a_5$	$3P\bar{\frac{3}{2}}$	(321)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} h^{\frac{1}{3}}$	$P\bar{\frac{3}{2}}$	(323)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} h^{\frac{1}{4}}$	$\frac{3}{4}P\bar{\frac{3}{2}}$	(324)	
Brahipiramide	$b^{\frac{1}{u-v}} b^{\frac{1}{u+v}} g^{\frac{1}{w}}$	$mP\bar{n}$	*(u v w)*	$u < v$
	$b' b^{\frac{1}{2}} b^{1} = e_2$	$\frac{3}{2}P\bar{3}$	(132)	$m = \frac{v}{w}$
	$b' b^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}}$	$P\bar{2}$	(122)	$n = \frac{v}{u}$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g^{\frac{1}{3}}$	$P\bar{3}$	(133)	
	$b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{6}} g^{\frac{1}{4}} = e_{\frac{3}{2}}$	$\frac{5}{4}P\bar{2}$	(154)	
	$b' b^{\frac{1}{3}} g^{1} = e_3$	$2P\bar{2}$	(121)	
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g^{\frac{1}{4}} = e_{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4}P\bar{3}$	(134)	
	$b' b^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}P\bar{2}$	(124)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}} g^{1}$	$4P\bar{4}$	(141)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{2}}$	$2P\bar{4}$	(142)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{3}}$	$\frac{4}{3}P\bar{4}$	(143)	
	$b' b^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{3}} = e_{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}P\bar{2}$	(123)	
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g'$	$3P\bar{3}$	(131)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{4}}$	$P\bar{4}$	(144)	
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{21}} g^{\frac{1}{2}}$	$6P\bar{\frac{3}{3}}$	(9.12.2)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} g' = e_5$	$3P\bar{\frac{3}{2}}$	(231)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}P\bar{\frac{3}{2}}$	(232)	
	$b' b^{\frac{1}{5}} g^{\frac{1}{3}}$	$P\bar{\frac{3}{2}}$	(233)	

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sistemul Hexagonal.

Bazlpinacoid	p	$0P$	(111)	(0001)
Prizma dir.	m	∞P	$(2\bar{1}\bar{1})$	$(00\bar{1}0)$
Prizma inv.	h'	∞P_2	$(10\bar{1})$	$(11\bar{2}0)$
Prizme dodecagone	h^{u}_{v}	$\infty P\frac{u+v}{u}$	$(2u+v, \bar{v-u}, 2v+u)$	$u\ v\ (\bar{u+v})\ 0$
	h^{2}	$\infty P\frac{3}{2}$	$(5\bar{1}4)$	$(21\bar{3}0)$
	$h^{\frac{3}{2}}$	$\infty P\frac{5}{3}$	$(8\bar{1}7)$	$(32\bar{5}0)$
	$h^{\frac{5}{4}}$	$\infty P\frac{9}{5}$	$(14.\bar{1}.\bar{1}3)$	$(54\bar{9}0)$
	h^{3}	$\infty P\frac{4}{3}$	$(7\bar{2}\bar{5})$	$(31\bar{4}0)$
	$h^{\frac{4}{3}}$	$\infty P\frac{7}{4}$	$(11.\bar{1}.\bar{1}0)$	$(43\bar{7}0)$
	$h^{\frac{5}{3}}$	$\infty P\frac{8}{5}$	$(13.2.\bar{1}\bar{1})$	$(53\bar{8}0)$
	$h^{\frac{5}{2}}$	$\infty P\frac{7}{5}$	$(12\bar{3}9)$	$(52\bar{7}0)$
	h^{4}	$\infty P\frac{5}{4}$	$(9\bar{3}\bar{6})$	$(41\bar{5}0)$

Isosceloedri pe muchi	$b^{\frac{v}{u}}$	$D\ \begin{matrix} v+2u \\ v-u \\ v-u \end{matrix}$	$I\ \begin{matrix} v+u \\ v+u \\ v-2u \end{matrix}$	$^{u}_{v}P$	$u0\bar{u}v$
	b^{1}	(100)	(221)	P	$(10\bar{1}1)$
	b^{2}	(411)	(110)	$\frac{1}{2}$P	$(10\bar{1}2)$
	b^{3}	(522)	(441)	$\frac{1}{3}$P	$(10\bar{1}3)$
	b^{4}	(211)	(552)	$\frac{1}{4}$P	$(10\bar{1}4)$
	b^{6}	(855)	(774)	$\frac{1}{6}$P	$(10\bar{1}6)$
	$b^{\frac{1}{2}}$	(511)	$(11\bar{1})$	2P	(2021)
	$b^{\frac{1}{3}}$	$(72\bar{2})$	$(44\bar{5})$	3P	(3031)
	$b^{\frac{1}{4}}$	$(31\bar{1})$	(557)	4P	(4041)
	$b^{\frac{2}{3}}$	$(81\bar{1})$	$(55\bar{4})$	$\frac{3}{2}$P	(3032)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Isosceloedri pe muchi	$b^{\frac{4}{3}}$	(10.1.1)	(772)	$\frac{3}{4}P$	(30$\bar{3}$4)
	$b^{\frac{3}{4}}$	(11.1.1)	(775)	$\frac{4}{3}P$	(40$\bar{4}$3)
	$b^{\frac{3}{2}}$	(711)	(551)	$\frac{2}{3}P$	(20$\bar{2}$3)
Isosceloedri pe unghiuri	$a^{\frac{v}{u}}$	$v+3u, v, v-3u$		$\frac{2u}{v}P2$	*(u u 2u v)*
	a^{1}	(412)		$2P2$	(11$\bar{2}$1)
	a^{2}	(52$\bar{1}$)		$P2$	(11$\bar{2}$2)
	$a^{\frac{1}{2}}$	(71$\bar{5}$)		$4P2$	(22$\bar{4}$1)
	$a^{\frac{1}{3}}$	(10.1.8)		$6P2$	(33$\bar{6}$1)
	$a^{\frac{2}{3}}$	(11.2.7)		$3P2$	(33$\bar{6}$2)
	$a^{\frac{3}{4}}$	(513)		$\frac{8}{3}P2$	(44$\bar{8}$3)
	$a^{\frac{3}{2}}$	(312)		$\frac{4}{3}P2$	(22$\bar{4}$3)
	$a^{\frac{4}{3}}$	(13.4.5)		$\frac{3}{2}P2$	(33$\bar{6}$4)
	$a^{\frac{5}{4}}$	(17.5.7)		$\frac{8}{5}P2$	(44$\bar{8}$5)
	$a^{\frac{5}{3}}$	(14.5.4)		$\frac{6}{5}P2$	(33$\bar{6}$5)
	$a^{\frac{1}{3}}$	(10.1.8)		$6P2$	(33$\bar{6}$1)
Didodecaedre	$b^{\frac{1}{v}}\, b^{\frac{1}{u}}\, h^{\frac{1}{w}}$	$D\ \begin{matrix}w+2u+v\\w+v-u\\w-2v-u\end{matrix}$	$I\ \begin{matrix}w+2v+u\\w+u-v\\w-2u-v\end{matrix}$	$\frac{v+u}{w}P\frac{v+u}{u}$	$\begin{matrix}u\\v\\u+v\\w\end{matrix}$
	$b'\, b^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{3}}$	(82$\bar{1}$)	(74$\bar{2}$)	$P\frac{3}{2}$	(21$\bar{3}$3)
	$b'\, b^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{2}} = a_{\frac{1}{2}}$	(71$\bar{2}$)	(21$\bar{1}$)	$\frac{3}{2}P\frac{3}{2}$	(21$\bar{3}$2)
	$b'\, b^{\frac{1}{2}}\, h' = a_2$	(20$\bar{1}$)	(52$\bar{4}$)	$3P\frac{3}{2}$	(21$\bar{3}$1)
	$b'\, b^{\frac{1}{3}}\, h^{\frac{1}{2}}$	(30$\bar{1}$)	(74$\bar{5}$)	$2P\frac{1}{3}$	(31$\bar{4}$2)
	$b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{3}}\, h'$	(30$\bar{2}$)	(82$\bar{7}$)	$5P\frac{5}{3}$	(32$\bar{5}$1)
	$b'\, b^{\frac{1}{3}}\, h^{\frac{1}{3}}\, a = \frac{1}{3}$	(10.1.$\bar{2}$)	(85$\bar{4}$)	$\frac{4}{3}P\frac{4}{3}$	(31$\bar{4}$3)

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Didodecaedre	$b' b^{\frac{1}{3}} h' = a_3$		$(8\bar{1}\bar{4})$	$(2\bar{1}\bar{2})$	$4P\frac{4}{3}$	$(31\bar{4}1)$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}} = a_{\frac{2}{3}}$		$(11.2.\bar{4})$	$(10.4.\bar{5})$	$\frac{5}{3}P\frac{5}{3}$	$(32\bar{5}3)$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}} = a_{\frac{3}{2}}$		$(10.1.\bar{5})$	$(3\bar{1}\bar{2})$	$\frac{5}{2}P\frac{5}{3}$	$(32\bar{5}2)$

Sistemul Romboedric.

Bazipinacoid	a'	$0R$	(0001)	(111)
Romboedrul primitiv	p	$+R$	$(10\bar{1}1)$	(100)
Romboedre dir. pe **a**	$a^{\frac{u}{v}}$	$+\frac{u-v}{2v+u}R\frac{u-v}{2v+u}$	$(u-v, 0, \overline{u-v}, 2v-u)$	$u\,v\,v$
	$a^{\frac{1}{4}}$	$+\frac{1}{4}R$	$(10\bar{1}4)$	(211)
	$a^{\frac{2}{5}}$	$+\frac{2}{5}R$	$(20\bar{2}5)$	(311)
	$a^{\frac{1}{2}}$	$+\frac{1}{2}R$	$(10\bar{1}2)$	(411)
	$a^{\frac{3}{7}}$	$\frac{1}{7}R$	$(10\bar{1}7)$	(322)
	$a^{\frac{5}{3}}$	$+\frac{1}{3}R$	$(10\bar{1}3)$	(522)
	$a^{\frac{5}{11}}$	$+\frac{2}{11}R$	$(20\bar{2}.11)$	(533)
	$a^{\frac{4}{3}}$	$+\frac{1}{10}P$	$(10\bar{1},10)$	(433)
Prizma pe **e**	e^2	$+\infty R$	$(10\bar{1}0)$	$(11\bar{2})$
Romboedre dir. pe **e**	$e^{\frac{u}{v}}$	$+\frac{u+v}{u-2v}R$	$(u+v, 0, \overline{u+v}, u-2v)$	$(u\,\bar{v}\,\bar{v})\quad u>2v$
	e^3	$+4R$	$(40\bar{4}1)$	$(31\bar{1})$
	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\frac{5}{2}R$	$(50\bar{5}2)$	$(41\bar{1})$
	e^5	$+2R$	$(20\bar{2}1)$	$(51\bar{1})$
	e^6	$+\frac{7}{4}R$	$(70\bar{7}4)$	(611)
	e^8	$+\frac{3}{2}R$	$(30\bar{3}2)$	$(81\bar{1})$
	e^{14}	$+\frac{5}{4}R$	$(50\bar{5}4)$	$(14.1\bar{1})$

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Romboedre dir. pe **e**	e^{17}	$+\frac{6}{5}R$	(6065)	(17.11)
	$e^{\frac{5}{2}}$	$+7R$	(7071)	(522)
	$e^{\frac{7}{2}}$	$+5R$	(3031)	(722)
Romboedru inv.	b'	$-\frac{1}{2}R$	(0112)	(110)
Romboedre inv. pe **a**	$a^{\frac{w}{u}}$	$-\frac{u-v}{2u+w}R$	$0.(u-w)(v-w)(2u+u)$	$u\,u\,w \quad w<2u$
	$a^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{5}R$	(0115)	(221)
	$a^{\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{7}R$	(0227)	(331)
	$a^{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{8}R$	(0118)	(332)
	$a^{\frac{1}{4}}$	$-\frac{1}{3}R$	(0113)	(441)
	$a^{\frac{2}{5}}$	$-\frac{1}{4}R$	(0114)	(552)
	$a^{\frac{3}{4}}$	$-\frac{1}{11}R$	(011.11)	(443)
	$a^{\frac{3}{5}}$	$-\frac{2}{13}R$	(022.13)	(553)
Romboedre inv. pe **e**	$e^{\frac{w}{u}}$	$-\frac{w+u}{2u-w}R$	$(0, w+u, v+u, 2u-w)$	$u\,u\,v \quad w<2u$
	e^{1}	$-2R$	(0221)	(111)
	$e^{\frac{1}{2}}$	$-R$	(0111)	(221)
	$e^{\frac{3}{2}}$	$-5R$	(0551)	(223)
	$e^{\frac{3}{4}}$	$-\frac{7}{5}R$	(0775)	(443)
	$e^{\frac{4}{5}}$	$-\frac{2}{3}R$	(0223)	(551)
	$e^{\frac{2}{3}}$	$-\frac{5}{4}R$	(0554)	(332)
	$e^{\frac{4}{5}}$	$-\frac{3}{2}R$	(0332)	(554)
	$e^{\frac{4}{3}}$	$-\frac{7}{2}R$	(0772)	(334)
	$e^{\frac{5}{4}}$	$-3R$	(0331)	(445)

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Romboedre inv. pe **e**	$e^{\frac{7}{5}}$	$-4R$	$(04\bar{4}1)$	$(55\bar{7})$
	$e^{\frac{8}{7}}$	$-\frac{5}{2}R$	$(05\bar{5}2)$	$(77\bar{8})$
	$e^{\frac{15}{8}}$	$-7R$	$(07\bar{7}1)$	$(88.\bar{15})$
	$e^{\frac{21}{12}}$	$-11R$	$(0.11.\bar{11}.1)$	$(12.12.\bar{21})$
Isosceloedre pe **a**	$b^{\frac{1}{w}} b^{\frac{1}{v}} b^{\frac{1}{u}}$	$\frac{2(u-v)}{3v} R_2$	$(u-v, u-v, 2(\overline{u-v})\,3v)$	$(u\,v\,w)$ $u+w=2v$
	$b^1 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}R_2$	$(11\bar{2}3)$	$(32\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$	$\frac{2}{9}R_2$	$(11\bar{2}9)$	$(43\bar{2})$
	$b' b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{2}R_2$	$(11\bar{2}4)$	$(74\bar{1})$
	$b' b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{4}{9}R_2$	$(22\bar{4}9)$	$(53\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{6}R_2$	$(1.1.2.\bar{1}2)$	$(54\bar{3})$
Isosoeloedru pe **b**	$b^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}R_2$	$(11\bar{2}3)$	$(21\bar{0})$
Isosceloedre pe **e**	$b^{\frac{1}{w}} d^{\frac{1}{v}} d^{\frac{1}{u}}$	$\frac{2(u-v)}{3v} R_2$	$(u-u, u-v, :(\overline{u-v})\,3v)$	$(u\,v\,\overline{w})$ $u-w=2v$
	$b' d' d^{\frac{1}{3}} = e_3$	$\frac{4}{3}R_2$	$(22\bar{4}3)$	$(31\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{4}}$	$2R_2$	$(11\bar{2}1)$	$(41\bar{2})$
	$b' d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{5}}$	R_2	$(11\bar{2}2)$	$(52\bar{1})$
	$b' d' d^{\frac{1}{7}} = e_7$	$4R_2$	$(22\bar{4}1)$	$(71\bar{1})$
Prizma pe **d**	d'	∞R_2	$(11\bar{2}0)$	$(10\bar{1})$
Prizme dodecagone	$b^{\frac{1}{u+v}} d^{\frac{1}{v}} d^{\frac{1}{u}}$	$\infty R\,\frac{2u+v}{u+2v}$	$(u-v, u+2v, 2u+v, 0)$	$(u\,v\,\overline{w})$ $u+v=w$
	$b^{\frac{1}{3}} d' d^{\frac{1}{2}}$	$\infty R\frac{5}{4}$	$(14\bar{5}0)$	$(21\bar{3})$
	$b^{\frac{1}{4}} d' d^{\frac{1}{3}}$	$\infty R\frac{7}{5}$	$(25\bar{7}0)$	$(31\bar{4})$
	$b^{\frac{1}{5}} d' d^{\frac{1}{4}}$	$\infty R\frac{3}{2}$	$(12\bar{3}0)$	$(41\bar{5})$
	$b^{\frac{1}{5}} d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}}$	$\infty R\frac{8}{7}$	$(17\bar{8}0)$	$(32\bar{5})$
	$b^{\frac{1}{7}} d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}}$	∞R_{10}^{11}	$(1,10,\bar{11},0)$	$(43\bar{7})$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Scaienoedre Directe pe **b**	$b^{\frac{u}{v}}$	$+\frac{u}{u+v}R^{\frac{u}{u-v}}$	$(u-v, v, \bar{u}, u+v)$	$(u\,v\,0)$	$\frac{u}{v}>2$
	b^{3}	$+\frac{3}{1}R^{\frac{3}{2}}$	$(2\bar{1}34)$	(310)	
	$b^{\frac{5}{2}}$	$+\frac{5}{7}R^{\frac{5}{3}}$	$(3\bar{2}57)$	(520)	
	$b^{\frac{4}{1}}$	$+\frac{4}{5}R^{\frac{4}{3}}$	$(3\bar{1}45)$	(410)	
	b^{5}	$+\frac{5}{6}R^{\frac{5}{1}}$	$(4\bar{1}56)$	(510)	
Scalenoedre Inv. pe **b**	$b^{\frac{u}{v}}$	$-\frac{u}{u+v}R^{u}_{v}$	$(u-v, v, \bar{u}, u+v)$	$(u\,v\,0)$	$\frac{u}{v}<2$
	$b^{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{5}R^{\frac{3}{2}}$	$(1\bar{2}35)$	(320)	
	$b^{\frac{4}{3}}$	$-\frac{4}{7}R^{\frac{4}{3}}$	$(1\bar{3}47)$	(430)	
	$b^{\frac{5}{3}}$	$-\frac{5}{8}R^{\frac{5}{3}}$	$(2\bar{3}58)$	(530)	
	$b^{\frac{5}{4}}$	$-\frac{5}{9}R^{\frac{5}{4}}$	$(1\bar{4}59)$	(540)	
Scalenoedre Directe pe **d**	$d^{\frac{u}{w}}$	$\frac{u+w}{u-w}R^{\frac{u+w}{u}}$	$(u, w, \bar{v}+)(-)$	$(u\,0\,w)$	$u+w>2$
	d^{2}	$+3R^{\frac{3}{2}}$	$(2\bar{1}31)$	$(20\bar{1})$	
	$d^{\frac{3}{2}}$	$+5R^{\frac{5}{3}}$	$(3\bar{2}51)$	$(30\bar{2})$	
	d^{3}	$+2R^{\frac{4}{3}}$	$(3\bar{1}42)$	$(30\bar{1})$	
	$d^{\frac{4}{1}}$	$+\frac{5}{3}R^{\frac{5}{1}}$	$(4\bar{1}53)$	$(40\bar{1})$	
Scalenoedre Dir. pe **a**	$b^{\frac{1}{w}}b^{\frac{1}{v}}b^{\frac{1}{u}}$	$\frac{u-v}{u+v+w}R^{\frac{u-w}{u-v}}$	$(u-v, v-w, w-\bar{u}, v+w)$	$(u\,v\,w)$ $u+w>2v$	
	$b'b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$	$+\frac{3}{7}R^{\frac{3}{2}}$	$(2\bar{1}37)$	(421)	
	$b'b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{5}}$	$+\frac{1}{2}R^{\frac{5}{3}}$	$(3\bar{1}48)$	(521)	
	$b'b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$	$+\frac{5}{9}R^{\frac{5}{4}}$	$(4\bar{1}59)$	(621)	
	$b'b^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{10}}$	$+\frac{3}{5}R^{\frac{3}{2}}$	$(2\bar{1}35)$	$(10.4.1)$	
	$b'b^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{5}}$	$+\frac{2}{3}R^{\frac{4}{3}}$	$(3\bar{1}46)$	$(13.4.1)$	
	$b'b^{\frac{1}{7}}b^{\frac{1}{16}}$	$+\frac{5}{8}R^{\frac{5}{3}}$	$(3\bar{2}58)$	$(16.7.1)$	

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Scalenoedre Inverse pe **a**	$b^{\frac{1}{w}} b^{\frac{1}{v}} b^{\frac{1}{u}}$	$\frac{u-w}{u+v+w} R^{\frac{u-w}{v-w}}$	$\frac{(u-v, v-w}{w-u, u+v+w)}$	$\frac{(u\ v\ w)}{u+w<2v}$
	$b' b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$	$-\frac{3}{8} R \frac{3}{2}$	$(12\bar{3}8)$	$(43\bar{1})$
	$b' b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}$	$-\frac{1}{2} R \frac{5}{3}$	$(1.3.\bar{4}.10)$	$(54\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}$	$-\frac{3}{11} R \frac{3}{2}$	$(1.2.\bar{3}.11)$	$(54\bar{2})$
	$b' b^{\frac{1}{7}} b^{\frac{1}{10}}$	$-\frac{3}{2} R \frac{3}{2}$	$(12\bar{3}6)$	$(10.7.1)$
	$b' b^{\frac{1}{10}} b^{\frac{1}{15}}$	$-\frac{1}{2} R \frac{4}{3}$	$(13\bar{4}8)$	$(13.10.1)$
	$b' b^{\frac{1}{10}} b^{\frac{1}{16}}$	$-\frac{5}{9} R \frac{5}{3}$	$(23\bar{5}9)$	$(16.10.1)$
Scalenoedre Directe pe **e**	$b^{\frac{1}{u}} d^{\frac{1}{v}} d^{\frac{1}{w}}$	$+\frac{u+w}{u-v-w} R \frac{u+w}{u+v}$	$\frac{(u+v, w-v,}{w+u, u-v-w)}$	$\frac{(u\ \bar{v}\ w)}{u+w<2v}$
	$b^{\frac{1}{4}} d' d^{\frac{1}{2}}$	$+ 6R\frac{6}{5}$	$(51\bar{6}1)$	$(4\bar{1}\bar{2})$
	$b^{\frac{1}{5}} d' d^{\frac{1}{3}}$	$+ 8R\frac{4}{3}$	$(62\bar{8}1)$	$(5\bar{1}\bar{3})$
	$b^{\frac{1}{6}} d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}}$	$+ 9R\frac{9}{8}$	$(81\bar{9}1)$	$(6\bar{2}\bar{3})$
	$b^{\frac{1}{8}} d' d^{\frac{1}{4}}$	$+ 4R\frac{4}{3}$	$(31\bar{4}1)$	$(8\bar{1}\bar{4})$
	$b^{\frac{1}{11}} d' d^{\frac{1}{7}}$	$+ 6R\frac{3}{2}$	$(42\bar{6}1)$	$(11.\bar{1}.\bar{7})$
	$b^{\frac{1}{w}} d^{\frac{1}{v}} d^{\frac{1}{u}}$	$+\frac{u+w}{u+v-w} R \frac{u+w,}{u-v}$	$\frac{(u-v, v+w,}{u+w, u+v-w)}$	$\frac{u\ v\ \bar{w}}{u-w>2v}$
	$b' d' d^{\frac{1}{4}} = e_4$	$+\frac{5}{4} R \frac{5}{3}$	(3254)	$(4\bar{1}\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{5}}$	$+\frac{7}{4} R \frac{7}{4}$	(4374)	$(5\bar{1}\bar{2})$
	$b' d' d^{\frac{1}{5}} = e_5$	$+\frac{6}{5} R \frac{3}{2}$	(4265)	$(5\bar{1}\bar{1})$
	$b' d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{5}}$	$+ R_2$	$(11\bar{2}2)$	$(5\bar{2}\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{6}}$	$+\frac{8}{5} R \frac{8}{5}$	$(53\bar{8}5)$	(612)
	$b' d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{10}}$	$+\frac{4}{3} R \frac{4}{3}$	$(31\bar{4}3)$	$(10.1,\bar{2})$
	$b' d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{8}}$	$+ R \frac{3}{2}$	$(21\bar{3}3)$	$(8\bar{2}\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}} d' d^{\frac{1}{7}}$	$+\frac{3}{2} R \frac{3}{2}$	$(21\bar{3}2)$	$(7\bar{1}\bar{2})$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Scalenoedre Inverse pe e	$b^{\frac{1}{w}}\,d^{\frac{1}{v}}\,d^{\frac{1}{u}}$	$-\frac{u+w}{u+v-w}R^{\frac{u+w}{v+w}}$	$\frac{(u-v,\ v+w}{u+w,\ u+v-w)}$	$u\,v\,\bar{w}$ $u-w<2v$
	$b'\,d'\,d^{\frac{1}{2}} = e_2$	$-\frac{3}{2}R^{\frac{3}{2}}$	$(12\bar{3}2)$	$(21\bar{1})$
	$l'\,d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{3}}$	$-R^{\frac{4}{3}}$	$(13\bar{4}4)$	$(32\bar{1})$
	$b^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{3}} = e^{3}_{2}$	$-\frac{5}{3}R^{\frac{5}{4}}$	(1453)	$(32\bar{2})$
	$b^{\frac{1}{3}}\,d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{3}} = e^{2}_{3}$	$-3R^{\frac{6}{5}}$	$(15\bar{6}2)$	$(32\bar{3})$
	$b^{\frac{1}{4}}\,d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{5}}$	$-3R^{\frac{3}{2}}$	$(12\bar{3}1)$	$(52\bar{4})$
	$b^{\frac{1}{7}}\,d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{8}}$	$-5R^{\frac{5}{3}}$	$(23\bar{5}1)$	(827)
	$b^{\frac{1}{2}}\,d'\,d^{\frac{1}{3}}$	$-\frac{5}{2}R^{\frac{5}{3}}$	$(23\bar{5}2)$	$(31\bar{2})$

Sistemul Monoclinic.

Bazipinacoid	p	$0P$	(001)	
Protoprizma	m	∞P	(110)	
Ortopinacoid	h'	$\infty P\bar{\infty}$	(100)	
Clinopinacoid	g'	$\infty P\infty$	(010)	
Ortoprizme	$h^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P^{\bar{u}}_{v}$	(u v0)	u > v
	h^{2}	$\infty P\bar{3}$	(310)	
	h^{3}	$\infty P\bar{2}$	(210)	
	h^{5}	$\infty P^{\frac{3}{2}}$	(320)	
	$h^{\frac{5}{3}}$	$\infty P4$	(410)	
	h^{4}	$\infty P^{\frac{5}{3}}$	(530)	
Clinoprizme	$g^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P^{\dot{v}}_{u}$	(u v 0)	u < v
	g^{2}	$\infty P\dot{3}$	(130)	
	g^{3}	$\infty P\dot{2}$	(120)	
	g^{5}	$\infty P^{\dot{3}}_{2}$	(230)	

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Clinoprizme	$g^{\frac{5}{3}}$	$\infty P\grave{4}$	(140)
	g^{13}	$\infty P\frac{\grave{7}}{6}$	(670)
	$g^{\frac{9}{7}}$	$\infty P\grave{8}$	(180)
	g^{9}	$\infty P\frac{\grave{5}}{4}$	(450)
	g^{4}	$\infty P\frac{\grave{5}}{3}$	(350)
	g^{7}	$\infty P\frac{\grave{4}}{3}$	(340)
Hemiclinodome	$e^{\frac{w}{v}}$	$\frac{v}{w}P\grave{\infty}$	(0v w)
	e^{1}	$P\grave{\infty}$	(011)
	e^{2}	$\frac{1}{2}P\grave{\infty}$	(012)
	$e^{\frac{1}{2}}$	$2P\grave{\infty}$	(021)
	$e^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}P\grave{\infty}$	(023)
	e^{5}	$\frac{1}{5}P\grave{\infty}$	(015)
	$e^{\frac{1}{4}}$	$4P\grave{\infty}$	(041)
	e^{3}	$\frac{1}{3}P\grave{\infty}$	(013)
	e^{4}	$\frac{1}{4}P\grave{\infty}$	(014)
Hemiortodome ant.	$0^{\frac{w}{u}}$	$-\frac{u}{w}P\bar{\infty}$	(u 0 w)
	0^{1}	$-P\bar{\infty}$	(101)
	0^{2}	$-\frac{1}{2}P\bar{\infty}$	(102)
	$0^{\frac{1}{2}}$	$-2P\bar{\infty}$	(201)
	0^{3}	$-\frac{1}{3}P\bar{\infty}$	103)
	$0^{\frac{4}{3}}$	$-\frac{3}{4}P\bar{\infty}$	(304)
Hemiortodome post.	$a^{\frac{w}{u}}$	$+\frac{u}{w}P\bar{\infty}$	($\bar{u}$ 0 w)
	a^{1}	$+P\bar{\infty}$	($\bar{1}$01)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Hemiortodome post.	a^{2}	$+\frac{1}{2}P\overline{\infty}$	$(\bar{1}02)$
	$a^{\frac{1}{2}}$	$+2P\overline{\infty}$	$(\bar{2}01)$
	$a^{\frac{2}{3}}$	$+\frac{3}{2}P\overline{\infty}$	$(\bar{3}02)$
	a^{3}	$+\frac{1}{3}P\overline{\infty}$	$(\bar{1}03)$
	$a^{\frac{7}{5}}$	$+\frac{5}{7}P\overline{\infty}$	$(\bar{5}07)$
	$a^{\frac{1}{3}}$	$+3P\overline{\infty}$	$(\bar{3}01)$
	$a^{\frac{3}{4}}$	$+\frac{4}{3}R\overline{\infty}$	$(\bar{4}03)$
Protohemipiramide anter.	$d^{\frac{w}{2v}}$	$-\frac{v}{w}P$	(v v w)
	$d^{\frac{1}{2}}$	$-P$	(111)
	d'	$-\frac{1}{2}P$	(112)
	$d^{\frac{1}{4}}$	$-2P$	(221)
	$d^{\frac{3}{10}}$	$-\frac{5}{3}P$	(553)
	$d^{\frac{1}{6}}$	$-3P$	(331)
	$d^{\frac{1}{10}}$	$-5P$	(551)
	$d^{\frac{2}{5}}$	$-\frac{5}{4}P$	(554)
	$d^{\frac{1}{12}}$	$-6P$	(661)
	$d^{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{3}P$	(113)
Protohemipiramide poster,	$b^{\frac{w}{2u}}$	$+\frac{u}{w}P$	$(\bar{u}\,u\,w)$
	$b^{\frac{1}{2}}$	$+P$	$(\bar{1}11)$
	b'	$+\frac{1}{2}P$	$(\bar{1}12)$
	b^{2}	$+\frac{1}{4}P$	(114)
	$b^{\frac{1}{4}}$	$+2P$	(221)
	$b^{\frac{1}{6}}$	$+3P$	$(\bar{3}31)$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Protohemipiramide poster.	$b^{\frac{3}{2}}$	$+\frac{1}{3}P$	$(\bar{1}13)$	
	$b^{\frac{9}{8}}$	$+\frac{1}{9}P$	$(\bar{4}49)$	
	$b^{\frac{2}{3}}$	$+\frac{3}{4}P$	$(\bar{3}34)$	
	$b^{\frac{3}{4}}$	$+\frac{2}{3}P$	$(\bar{2}23)$	
	$b^{\frac{1}{3}}$	$+\frac{3}{2}P$	(332)	
Hemiclinopiramide anter.	$b^{\frac{1}{v-u}}d^{\frac{1}{u+v}}g^{\frac{1}{w}}$	$-\frac{v}{w}P\dot{\frac{v}{u}}$	*(u v w)*	u < v
	$d'b^{\frac{1}{3}}g'$	$-2P\dot{2}$	(121)	
	$d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}g'$	$-3P\dot{3}$	(131)	
	$d'b^{\frac{1}{5}}g'$	$-3P\dot{\frac{3}{2}}$	(231)	
	$d'b^{\frac{1}{5}}g^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}P\dot{\frac{3}{2}}$	(232)	
	$d^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{8}}g^{\frac{1}{6}}$	$-\frac{7}{6}P\dot{7}$	(176)	
	$d^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{11}}g'$	$-9P\dot{\frac{9}{2}}$	(291)	
	$d^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{11}}g^{\frac{1}{5}}$	$-2P\dot{1}0$	(1.10.5)	
	$d^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}g'$	$-6P\dot{3}$	(261)	
	$d^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{14}}g'$	$-12P\dot{6}$	(2.12.1)	
	$d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}g'$	$-\frac{3}{2}P\dot{3}$	(132)	
	$d'b^{\frac{1}{3}}g^{\frac{1}{2}}$	$-P\dot{2}$	(122)	
	$d'b^{\frac{1}{5}}g^{\frac{1}{3}}$	$-P\dot{3}$	(133)	
	$d'b^{\frac{1}{5}}g'$	$-\frac{2}{3}P\dot{2}$	(123)	
Hemiclinopiramide poster,	$b^{\frac{1}{v-u}}d^{\frac{1}{u+v}}g^{\frac{1}{w}}$	$+\frac{v}{w}P\dot{\frac{v}{u}}$	*(ū v w)*	u < v
	$b'd^{\frac{1}{3}}g'$	$+3P\dot{\frac{3}{2}}$	$(\bar{2}31)$	
	$b^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{4}}g'$	$+3P\dot{3}$	$(\bar{1}31)$	
	$b^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{10}}g'$	$+9P\dot{9}$	$(\bar{1}91)$	

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Hemiclinopiramide poster.	$b^{\frac{1}{3}}\,d^{\frac{1}{5}}\,g'$	$+4P\grave{4}$	$(\bar{1}41)$	
	$b'\,d^{\frac{1}{5}}\,g^{\frac{1}{2}}$	$+\frac{3}{2}P\grave{\frac{3}{2}}$	$(\bar{2}32)$	
	$b^{\frac{1}{9}}\,d^{\frac{1}{21}}\,g'$	$+20P\grave{2}0$	$(\bar{1}.20.1)$	
	$b'\,d^{\frac{1}{3}}\,g^{1}$	$+2P\grave{2}$	$(\bar{1}21)$	
Hemiortopiramide poster.	$b^{\frac{1}{u-v}}\,b^{\frac{1}{u+v}}\,h^{\frac{1}{w}}$	$+\frac{u}{w}P\frac{u}{v}$	$(\bar{u}\,v\,w)$	$u>v$
	$b'\,b^{\frac{1}{2}}\,h^{1}=a_2$	$+\frac{3}{2}P\bar{3}$	$(\bar{3}12)$	
	$b^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{4}}\,h'$	$+3P\bar{3}$	(311)	
	$b'\,b^{\frac{1}{5}}\,h'$	$+3P\frac{\bar{3}}{2}$	$(\bar{3}21)$	
	$b'\,b^{\frac{1}{3}}\,h'=a_3$	$+2P\bar{2}$	(211)	
	$b^{\frac{1}{5}}\,b^{\frac{1}{4}}\,h'$	$+7P\frac{\bar{7}}{2}$	(721)	
	$b^{\frac{1}{7}}\,b^{\frac{1}{9}}\,h^{\frac{1}{7}}$	$+\frac{8}{7}P\bar{8}$	(817)	
Hemiortopiramide anter.	$d^{\frac{1}{u-v}}\,d^{\frac{1}{u+v}}\,h^{\frac{1}{w}}$	$-\frac{u}{w}P\frac{u}{v}$	$(u\,v\,w)$	$u>v$
	$d'\,d^{\frac{1}{3}}\,h'=0_3$	$-2P\bar{2}$	(211)	
	$d'\,d^{\frac{1}{5}}\,h'=0_5$	$-3P\frac{\bar{3}}{2}$	(321)	
	$d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{4}}\,h'$	$-3P\bar{3}$	(311)	
	$d'\,d^{\frac{1}{5}}\,h^{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}P\frac{\bar{3}}{2}$	(322)	
	$d'\,d^{\frac{1}{2}}\,h'=0_2$	$-\frac{3}{2}P\bar{3}$	(312)	
	$d'\,d^{\frac{1}{3}}\,h^{\frac{1}{2}}$	$-P\bar{2}$	(212)	
	$d'\,d^{\frac{1}{5}}\,h^{\frac{1}{3}}$	$-P\frac{\bar{3}}{2}$	(323)	
	$d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{4}}\,h^{\frac{1}{3}}$	$-P\bar{3}$	(313)	
	$d'\,d^{\frac{1}{3}}\,h^{\frac{1}{3}}=0_{\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{3}P\bar{2}$	(213)	
	$d^{\frac{1}{2}}\,d^{\frac{1}{6}}\,h^{\frac{1}{7}}$	$-\frac{1}{7}P\bar{2}$	(427)	
	$d^{\frac{1}{3}}\,d^{\frac{1}{5}}\,h^{\frac{1}{4}}$	$-P4$	(414)	

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Sistemul Triclinic.

Bazipinacoid	p	$0P$	(001)
Brahipinacoid	g'	$\infty P\bar{\infty}$	(010)
Macropinacoid	h'	$\infty P\bar{\infty}$	(100)
Protoprizma dr.	t	$\infty P'$	(110)
Protoprizma st.	m	$\infty' P$	($\bar{1}10$)
Hemibrahiprizme dr.	$g^{\frac{u+v}{v-u}}$	$\infty P', \frac{\bar{v}}{u}$	(u v 0) u < v
	g^{3}	$\infty P, '\bar{2}$	(120)
	g^{2}	$\infty P, '\bar{3}$	(130)
	g^{9}	$\infty P, '\frac{\bar{5}}{4}$	(450)
	$g^{\frac{3}{2}}$	$\infty P, '\bar{5}$	(150)
Hemibrahiprizme st.	$\frac{u-v}{v-u}g$	$\infty, 'P\frac{\bar{v}}{u}$	($\bar{u}$ v 0) u < v
	^{3}g	$\infty, 'P\bar{2}$	($\bar{1}20$)
	^{2}g	$\infty, 'P\bar{3}$	($\bar{1}30$)
	$^{\frac{3}{2}}g$	$\infty, 'P\bar{5}$	($\bar{1}50$)
Hemimacroprizme dr.	$h^{\frac{u+v}{u-v}}$	$\infty P', \frac{\bar{u}}{v}$	(u v 0) u > v
	h^{3}	$\infty P, '\bar{2}$	(210)
	h^{2}	$\infty P, '\bar{3}$	(310)
	$h^{\frac{5}{3}}$	$\infty P, '\bar{5}$	(510)
	$h^{\frac{5}{3}}$	$\infty P, '4$	(410)
	h^{5}	$\infty P, '\frac{\bar{3}}{2}$	(320)
	h^{7}	$\infty P, '\frac{4}{3}$	(430)

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Hemimacroprizme st.	$\frac{u+v}{u-v}h$	$\infty \breve{P} \frac{u}{v}$	$(\bar{u}\,v\,0)$	$u > v$
	^{3}h	$\infty \breve{P} \bar{2}$	$(\bar{2}10)$	
	^{2}h	$\infty \breve{P} \bar{3}$	$(\bar{3}10)$	
	$^{\frac{3}{2}}h$	$\infty \breve{P} \bar{5}$	$(\bar{5}10)$	
Hemibrahidome sup. dr.	$\frac{w}{i^{v}}$	$\frac{v}{w},P'\breve{\infty}$	$(0\,v\,w)$	
	i^{2}	$\frac{1}{2},P'\breve{\infty}$	(012)	
	$i^{\frac{1}{2}}$	$2,P'\breve{\infty}$	(021)	
	i^{1}	$,P'\breve{\infty}$	(011)	
Hemibrahidome sup. st.	$\frac{w}{e^{v}}$	$\frac{v}{w}'P,\breve{\infty}$	$(0\,v\,\bar{w})$	
	e^{1}	$'P,\breve{\infty}$	(011)	
	e^{2}	$\frac{1}{2}'P,\breve{\infty}$	$(01\bar{2})$	
	$e^{\frac{1}{2}}$	$2'P,\breve{\infty}$	$(02\bar{1})$	
	$e^{\frac{1}{6}}$	$6'P,\breve{\infty}$	(061)	
Hemimacrodome ant.	$\frac{w}{0^{u}}$	$\frac{u}{w}'P'\bar{\infty}$	$(u\,0\,w)$	
	0^{1}	$'P'\bar{\infty}$	(101)	
	0^{2}	$\frac{1}{2}'P'\bar{\infty}$	(102)	
	$0^{\frac{1}{2}}$	$2'P'\bar{\infty}$	(201)	
Hemimacrodome post.	$^{w}a^{u}$	$\frac{u}{w},P,\bar{\infty}$	$(\bar{u}\,0\,w)$	
	a^{1}	$,P,\bar{\infty}$	(101)	
	a^{2}	$\frac{1}{2},P,\bar{\infty}$	(102)	
	$a^{\frac{1}{2}}$	$2,P,\bar{\infty}$	$(\bar{2}01)$	
	$a^{\frac{3}{4}}$	$\frac{4}{3},P,\bar{\infty}$	$(\bar{4}03)$	

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

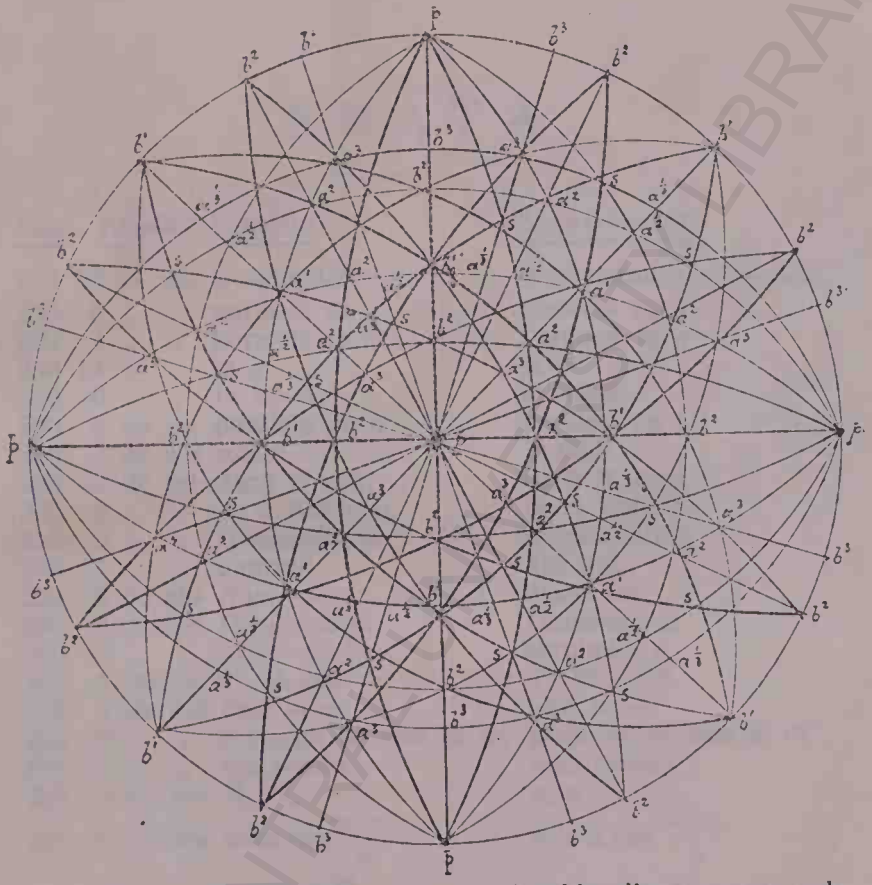
Prototetartopiramide sup. dr.	$f^{\frac{w}{2u}}$	$\frac{u}{w}P'$	*(u u w)*
	$f^{\frac{1}{2}}$	P'	(111)
	$f^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}P'$	(223)
	f'	$\frac{1}{2}P'$	(112)
Prototetartopiramide sup. st.	$c^{\frac{w}{2u}}$	$\frac{u}{v}'P$	$(\bar{u}\ u\ w)$
	$c^{\frac{1}{2}}$	$'P$	$(\bar{1}11)$
	$c^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}'P$	$(\bar{2}23)$
	c^{1}	$\frac{1}{2}'P$	$(\bar{1}12)$
Prototetartopiramide inf. dr.	$b^{\frac{w}{2u}}$	$\frac{u}{w}P,$	$(u\ u\ \bar{w})$
	$b^{\frac{1}{2}}$	$P,$	$(11\bar{1})$
	$b^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}P,$	$(22\bar{3})$
	$b^{\frac{1}{1}}$	$2P,$	$(22\bar{1})$
	b'	$\frac{1}{2}P,$	$(11\bar{2})$
Prototetartopiramide inf. st.	$d^{\frac{w}{2u}}$	$\frac{u}{w},P$	$(u\ u\ \bar{w})$
	$d^{\frac{1}{2}}$	$,P$	$(\bar{1}1\bar{1})$
	$d^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3},P$	$(\bar{2}2\bar{3})$
	$d^{\frac{1}{1}}$	$2,P$	$(\bar{2}2\bar{1})$
	d'	$\frac{1}{2},P$	$(\bar{1}1\bar{2})$
Tetartobrahipiramide sup. dr.	$f^{\frac{1}{v-u}}\ c^{\frac{1}{u+v}}\ g^{\frac{1}{w}}$	$\frac{v}{w}P'\frac{\bar{v}}{\bar{u}}$	(u v w)
	$f^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{1}}\ g'$	$3P'\bar{3}$	(131)
	$f'\ c^{\frac{1}{2}}\ g'$	$\frac{3}{2}P'\bar{3}$	(132)
	$f'\ c^{\frac{1}{3}}\ g'$	$2P'\bar{2}$	(121)

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tetartobrahi-piramide sup. st.	$d^{\frac{1}{v-u}} b^{\frac{1}{u+v}} g^{\frac{1}{w}}$	${}^{v}_{w}{}'P^{\bar{v}}_{\bar{u}}$	$(\bar{u}\,v\,\bar{w})$
	$d^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} g'$	$3'P\bar{3}$	$(\bar{1}3\bar{1})$
	$d' b^{\frac{1}{2}} g'$	${}^{3}_{2}{}'P\bar{3}$	$(\bar{1}32)$
Tetartobrahi-piramide inf. dr.	$b^{\frac{1}{v-u}} d^{\frac{1}{u+v}} g^{\frac{1}{w}}$	${}^{v}_{w}P_{,\bar{u}}^{\bar{v}}$	$(u\,v\,\bar{w})$
	$b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}}$	$3P,\bar{3}$	$(13\bar{1})$
	$b' d^{\frac{1}{2}} g'$	${}^{3}_{2}P,\bar{3}$	(132)
Tetartobrahi-piramide inf. st.	$c^{\frac{1}{v-u}} f^{\frac{1}{u+v}} g^{\frac{1}{w}}$	${}^{v}_{w},P^{\bar{v}}_{\bar{u}}$	$(\bar{u}\,v\,w)$
	$c^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{4}} g'$	$3,P\bar{3}$	$(13\bar{1})$
	$c' f^{\frac{1}{2}} g'$	${}^{3}_{2},P\bar{3}$	(132)
Tetartomacro-piramidesup. dr.	$f^{\frac{1}{v-u}} d^{\frac{1}{u+v}} h^{\frac{1}{w}}$	${}^{u}_{w}P'^{\bar{u}}_{\bar{v}}$	$(u\,v\,w \quad u>v$
	$f^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{4}} h'$	$3P'3$	(311)
	$f' d^{\frac{1}{2}} h'$	${}^{3}_{2}P'3$	(312)
Tetartomacro-piramide sup. st.	$d^{\frac{1}{u-v}} f^{\frac{1}{u+v}} h^{\frac{1}{w}}$	${}^{u}_{w}{}'P^{\bar{u}}_{v}$	$(\bar{u}\,v\,\bar{w})$
	$d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{4}} h'$	$3'P3$	$(3\bar{1}1)$
	$d' f^{\frac{1}{2}} h'$	${}^{3}_{2}{}'P3$	$(3\bar{1}2)$
Tetartomacro-piramide inf. dr.	$b^{\frac{1}{u-v}} c^{\frac{1}{u+v}} h^{\frac{1}{w}}$	${}^{u}_{w}P_{,v}^{\bar{u}}$	$(u\,v\,\bar{w})$
	$b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{4}} h'$	$3P,3$	$(3\bar{1}1)$
	$b' c^{\frac{1}{2}} h'$	${}^{3}_{2}P,3$	$(3\bar{1}2)$
Tetartomacro-piramide inf. st.	$c^{\frac{1}{u-v}} b^{\frac{1}{u+v}} h^{\frac{1}{w}}$	${}^{u}_{w},P^{\bar{u}}_{v}$	$(\bar{u}\,v\,w)$
	$c^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} h'$	$3,P3$	$(3\bar{1}1)$
	$c' b^{\frac{1}{2}} h'$	${}^{3}_{2},P3$	$(3\bar{1}2)$

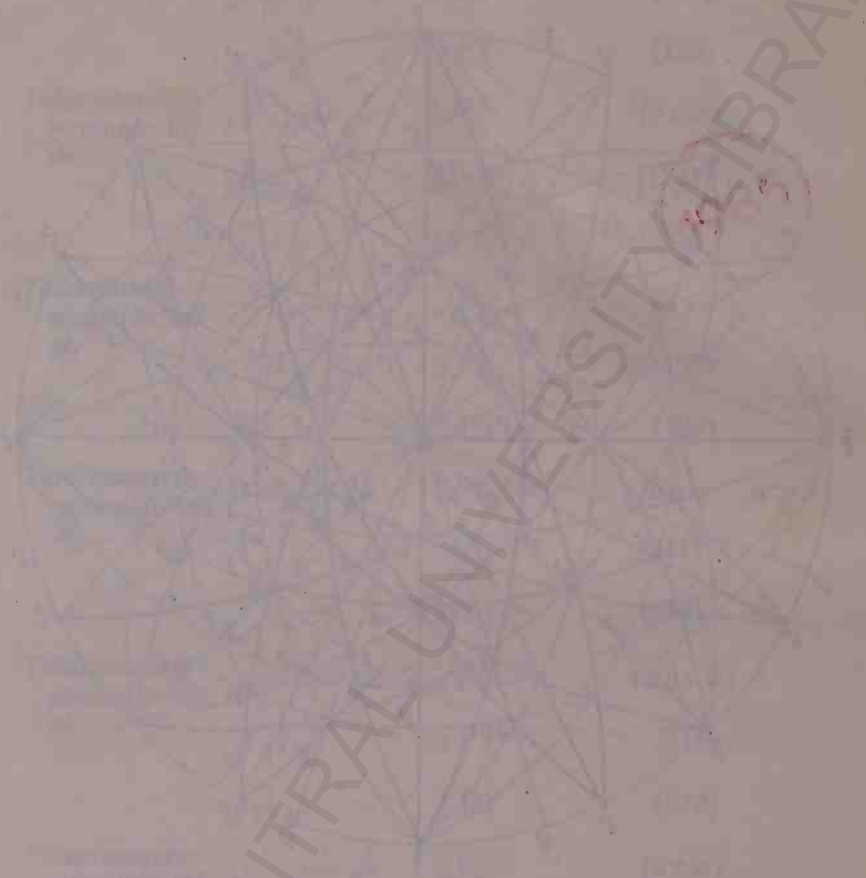
BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

Pentru a ne pute mai bine da samă de importanţa proiecţiunei polilor feţelor, mai ales în ce priveşte aplicarea principiului feţelor în zonă, dăm în figura alăturată projecţia polilor



feţelcr principalelor forme a sistemnlui cubic, din care se vede de ex. că feţele p, l^2, b' formează o zonă; apoi altă zonă formată de feţele: p, s, $a^{\frac{1}{2}}$, a^2, l^2, sau p, a^3, a^2, a^1, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, b' etc. a căror poli se găsesc pe circonferinţa aceluiaş cerc mare.

548:513(02)=59 vol 1-2



BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ERATA

Pag.	Rândul	In loc de	Să se cetească
243	13 de sus	şi octaedrul $b\frac{1}{2}$	şi octaedrul $b\ \frac{1}{2}$ (Fig. 383)
250	6 „ „	paralelă cu g	paralelă cu g'
250	7 „ „	normală la g	normală la g'
250	14 „ „	la g	la g'
250	16 „ „	In două	în două
250	5 de jos	paralelă cu h	paralelă cu h'
258	2 de sus	rutiiul	Rutilul
258	10 de jos	dacă la rutil	dacă la Rutil
258	9 „ „	de a Rutitului	de a Rutilului
258	5 „ „	**Goniomefrie**	**Goniometrie**
258	1 „ „	ujntorul	ajutorul
259	6 de sus	*Romé pe*	*Romé de*
260	5 de sus	*Geniometrul*	*Goniometrul*
263	8 „ „	şurubului S	şurubului s
265	4 de jos	5′ 59 295	$5\times59=295'$
269	9 de sus	este în m	este în m''
269	9 „ „	proiecţia sa este în m,	prejecţia sa este în m″,
269	18 „ „	ses pozitiv	sens pozitiv
269	5 de jos	M_0 N_0	m n
271	9 de sus	$s=a\cos\frac{m_0m,}{a}$	$S=a\cos\frac{m_0m,}{a}$
271	13 „ „	$s=a\cos\frac{vt}{a}$	$S=a\cos\frac{vt}{a}$
271	10 de jos	valoarea lui s avem	valoarea lui S avem
272	3 de sus	$a\sqrt{\frac{g}{l}}$	$a\sqrt{\frac{g}{l}}$
275	5 de jos	$=1$	$=-1$
278	11 de sus	$+\ldots.)$	$+\ldots.)^2$
283	1 de sus	Àa, ab bc	Aa, ab, bc
283	17 de jos	drumut	drumul
289	3 de sus	A ş	A şi
289	10 „ „	n cos r dr′	n cos r′ dr′
289	4 de jos	$\text{Sin}\frac{A\ \delta}{2}$	$\text{Sin}\frac{A+\delta}{2}$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de	Să se ceteasca
291	15 de jos	VV	VV′
291	8 „ „	şl relativ	şi relativ
299	9 „ „	ortorombie	ortorombic
299	1 „ „	eiipsoidul	elipsoidul
302	4 de sus	$\frac{1}{OA}=V_g\frac{1}{n_p}$ şi $\frac{1}{OB}=V'_g$	$\frac{1}{OA}=V_g\frac{1}{n_p}$ şi $\frac{1}{OB}=V'_g\frac{1}{n'_p}$
302	6 de jos	$\frac{1}{n_g}=V_g$	$\frac{1}{n_p}=V_g$
307	7 de sus	IP PEtg PEI	IP=PEtg PEI
309	5 „ „	SI m′n′	S′ Im′ n′
313	2 de jos	$(r^2—c^2)\,a^2z$	$(r^2—c^2)a^2z^2$
322	2 de sus	vfbraţiune	vibraţiune
327	17 „ „	(β—α,	(β—α)
329	17 „ „	sin 2α 0	sin 2α=0
330	7 „ „	(Fig. 32)	(Fig. 532)
339	14 de jos	ncide	incide
347	16 de sus	micrescoape	microscoape
347	17 „ „	reunîte	reunite
349	3 de jos	arientarea	orientarea
353	12 de sus	çi	şi

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY